28 de noviembre.

1) Sean V y W F-e.v, $\dim V = n$, $\dim W = m$.
y $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$ bases ordenadas de V y W respectivamente.

Hay un isomorfismo

$$\operatorname{Hom}_F(V, W) \xrightarrow[f]{\cong} M_{m \times n}(F).$$

dado por. $f(T) = [T]_\alpha^\beta$.

dem :

f es una transformación lineal :

- f es aditiva :

Sean $T: V \longrightarrow W$ y $G: V \longrightarrow W$ t. lineales.

P.D. $f(T+G) = f(T) + f(G)$.

$$f(T+G) = [T+G]_{\alpha}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\beta} + [G]_{\alpha}^{\beta} = f(T) + G(T)$$

- f es F - lineal.

Sea $T: V \to W$ una t. lineal y $\lambda \in F$.

P.D. $f(\lambda T) = \lambda f(T)$.

$$f(\lambda T) = [\lambda T]_\alpha^\beta = \lambda [T]_\alpha^\beta = \lambda f(T).$$

$\therefore$ f es una t. lineal.

- P.D. f es inyectiva.

Tenemos que el $\operatorname{Ker}(f)$ es subespacio del espacio $\operatorname{Hom}_F(V,W)$ y el vector cero de $\operatorname{Hom}_F(V,W)$ es la transformación $O: V \longrightarrow W$, $O(v) = O_W \; \forall v \in V$.

P.D. $\operatorname{Ker}(f) = \{O\}$.

Sea $T \in \operatorname{Ker}(f)$, P.D $T = O$.

$T \in \operatorname{Ker}(T) \Rightarrow f(T) = [T]_\alpha^\beta = (0)_{m \times n}$.

de aquí que para cada $1 \leq j \leq n$,

la j-esima columna de la matriz $[T]_\alpha^\beta$ es nula.

Por definición de $[T]_\alpha^\beta$, la j-ésima columna de $[T]_\alpha^\beta$ es el vector de coordenadas $[T(v_j)]_\beta$.

$\Rightarrow T(v_j) = 0w_1 + \dots + 0w_m = 0_W$.

$\therefore \quad T(v_j) = 0_W \quad \forall\, j = 1, \dots, n.$

Sea $v \in V$, v se expresa de manera única como $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$.

$\therefore \quad T(v) = a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) = 0_W.$

$\therefore \quad T = 0.$

$\therefore$ f es inyectiva.

- f es suprayectiva.

$$\mathrm{Hom}_F(V, W) \longrightarrow M_{m\times n}(F).$$

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(F)$. Queremos encontra una t. lineal $T: V \longrightarrow W$ tal que

$$f(T) = [T]_\alpha^\beta = A.$$

Debemos definir a T de manera que $[T(v_j)]_\beta$ sea igual a la j-ésima columna de A, $1 \leq j \leq n$.

$$[T(v_j)]_\beta = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Definimos $T(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \cdots + a_{mj} w_m$.

$1 \leq j \leq n$.

Entonces $[T]_\alpha^\beta = A$.

Notación:

Si $\dim V = n$ y α es una base ordenada de V y $T: V \longrightarrow V$ es una t. lineal.

Escribimos. $[T]_\alpha^\alpha = [T]_\alpha$

2) Sea V un F-e.v. $\dim V = n$.
y $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de V.
Consideremos la transformación identidad de V en V, $1_V : V \longrightarrow V$.
Entonces.

$$[1_V]_\alpha = I$$

donde I es la matriz identidad de $n \times n$.

dem: Para obtener la matriz $[1_V]_\alpha$.

debemos calcular los vectores de coordenadas.

$[1_V(v_j)]_\alpha$ para cada $1 \leq j \leq n$.

$$1_V(v_j) = v_j = 0v_1 + \cdots + 0v_{j-1} + 1v_j + 0v_{j+1} + \cdots + 0v_n.$$

$$\Rightarrow [1_V(v_j)]_\alpha = [v_j]_\alpha = \bar{e}_j \in F^n.$$

$$\Rightarrow [1_V]_\alpha = I.$$

3) Sean V y W F-e.v , $\dim V = n = \dim W$.

Sean α y β bases ordenadas de V y W respectivamente.

y sea $T: V \longrightarrow W$ una t. lineal.

Entonces T es una t. lineal biyectiva

si y solo si $[T]_{\alpha}^{\beta}$ es invertible y en este

caso. $[T^{-1}]_{\beta}^{\alpha} = \left([T]_{\alpha}^{\beta}\right)^{-1}$.

dem:

$\Rightarrow$) Supongamos que T es biyectiva y sea T^{-1} la transformación inversa de T.

Tenemos.

$$\begin{tikzcd} \overset{\alpha}{V} \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "T^{-1}\circ T = 1_V"'] & \overset{\beta}{W} \arrow[r, "T^{-1}"] & \overset{\alpha}{V} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overset{\beta}{W} \arrow[r, "T^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "T\circ T^{-1} = 1_W"'] & \overset{\alpha}{V} \arrow[r, "T"] & \overset{\beta}{W} \end{tikzcd}$$

$$T^{-1}\circ T = 1_V \qquad T\circ T^{-1} = 1_W.$$

$$\underline{I} = [1_V]_\alpha = [T^{-1}\circ T]_\alpha^\alpha = [T^{-1}]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\beta .$$

$$I = [1_W]_\beta = [T \circ T^{-1}]_\beta^\beta = [T]_\alpha^\beta \, [T^{-1}]_\beta^\alpha$$

$\therefore$ $[T]_\alpha^\beta$ is invertible y $[T^{-1}]_\beta^\alpha = \left([T]_\alpha^\beta\right)^{-1}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $A = [T]_{\alpha}^{\beta}$ es invertible.

P. D. T es biyectiva.

Sea A^{-1} la matriz inversa de A.

Por el teorema 1, hay un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{F}(W,V) \xrightarrow{g} M_{n \times n}(F)$$

$$g(G) = [G]_{\beta}^{\alpha}$$

Como g es suprayectiva y $A^{-1} \in M_{n \times n}(F)$.

existe $G: W \to V$ tal que.

$$g(G) = [G]_{\beta}^{\alpha} = A^{-1}.$$

P.D. G es la transformación inversa de T.

$$\underline{I} = A A^{-1} = [T]_{\alpha}^{\beta} [G]_{\beta}^{\alpha} = [T \circ G]_{\beta}^{\beta}$$

$\Rightarrow \forall w \in W.$ $[T \circ G]_{\beta} [w]_{\beta} = \underline{I} [w]_{\beta} = [w]_{\beta}.$

$\Rightarrow (T \circ G)(w) = w \quad \forall w \in W \quad \Rightarrow \quad T \circ G = 1_W.$

De manera análoga, como $A^{-1}A = I$.

entonces $G \circ T = 1_V$.

$\therefore$ G es la inversa de T.

4) Ejemplo:

Sea $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la t. lineal dada por.

$T(x,y,z) = (-x+3y, \ 2y+z, \ 6z)$.

Probar que T es biyectiva y encontrar T^{-1}.

Paso 1) Elegimos cualquier base ordenada de $\mathbb{R}^3$.

por ejemplo la base canónica $\alpha = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

con el orden usual.

Paso 2) Calculamos $[T]_{\alpha}^{\alpha} = [T]_{\alpha}$.

Para ello calculamos los vectores de coordenadas.

$$[T(\bar{e}_1)]_{\alpha} \ , \ [T(\bar{e}_2)]_{\alpha} , \ [T(\bar{e}_3)]_{\alpha} .$$

$$[T]_{\alpha} = \left([T(\bar{e}_1)]_{\alpha} \,\middle|\, [T(\bar{e}_2)]_{\alpha} \,\middle|\, [T(\bar{e}_3)]_{\alpha} \right).$$

$$T(x,y,z) = (-x+3y,\ 2y+z,\ 6z).$$

$$T(1,0,0) = (-1,0,0) = -1\,\bar{e}_1 + 0\,\bar{e}_2 + \bar{0}\,e_3.$$

$$\Rightarrow [T(\bar{e}_1)]_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(0,1,0) = (3,\ 2,\ 0) = 3\,\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 0\,\bar{e}_3.$$

$$\Rightarrow [T(\bar{e}_2)]_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(0,0,1) = (0,1,6) = 0\,\bar{e}_1 + 1\,\bar{e}_2 + 6\,\bar{e}_3$$

$$\Rightarrow [T(\bar{e}_3)]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad [T]_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

obs:

Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$(x, y, z) = x\,\bar{e}_1 + y\,\bar{e}_2 + z\,\bar{e}_3$.

$[(x,y,z)]_\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\qquad [T]_\alpha [v]_\alpha = [T(v)]_\alpha$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 3y \\ 2y + z \\ 6z \end{pmatrix}$$

Como $[T]_\alpha$ es triangular superior y todas las entradas de la diagonal son <u>no nulas</u> entonces $[T]_\alpha$ es invertible y por tanto T es biyectiva.

Paso 3). Como encontrar $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Calculamos $\left([T]_\alpha\right)^{-1}$

$$\left([T]_\alpha\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Para obtener T^{-1}.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + \frac{3}{2}b - 1/4\, c \\ \frac{1}{2}b - 1/12\, c \\ \frac{1}{6}c \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}(a,b,c) = \left(-a + \frac{3}{2}b - 1/4\, c,\ \frac{1}{2}b - \frac{1}{12}c,\ \frac{1}{6}c\right).$$

5) La matriz de cambio de base.

Sea V un F-e.v, $\dim V = n$.

y sean α y α' bases ordenadas de V.

La matriz asociada a la transformación identidad $1_V : V \to V$ respecto de las bases α y α'

$[1_V]_{\alpha}^{\alpha'}$ se llama la matriz de cambio de base.

La igualdad.

$$[1_V]_{\alpha}^{\alpha'}[v]_{\alpha} = [1_V(v)]_{\alpha'} = [v]_{\alpha'}.$$

$[1_V]_{\alpha}^{\alpha'}$ transforma las coordenadas de v respecto de la base α en las coordenadas de v respecto de la base α'.

Análogamente tenemos,

$$[1_V]_{\alpha'}^{\alpha}.$$

Se cumple que.

$$[1_V]_{\alpha}^{\alpha'} [1_V]_{\alpha'}^{\alpha} = I.$$

$$[1_V]_{\alpha'}^{\alpha} [1_V]_{\alpha}^{\alpha'} = I.$$

Ejemplo:

$\alpha = \{ (1,0), (0,1) \}$. $\alpha' = \{ (0,-1), (3,2) \}$.

$$[\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}]_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}((1,0)) = (1,0) = \overset{2/3}{a}(0,-1) + \overset{1/3}{b}(3,2) = (3b, -a+2b)$$

$\Rightarrow 3b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}$ $\quad -a + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$.

$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}(0,1) = (3b, -a+2b)$ $\quad 3b = 0 \Rightarrow b = 0$.

$= -1(0,-1) + 0(3,2)$. $\quad a = -1$.