22 de noviembre.

$T: V \longrightarrow W \qquad \dim V = n \qquad \dim W = m.$

α y β bases ordenadas de V y W respectivamente.

$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}.$

$$[T]_\alpha^\beta = \left([T(v_1)]_\beta \quad [T(v_2)]_\beta \quad \cdots \quad [T(v_n)]_\beta \right).$$

$m \times n.$

$\uparrow$ columna 1 $\quad \uparrow$ columna 2 $\dots \quad \uparrow$ columna n.

1) Sea $T: V \to W$ t. lineal, $\dim V = n$, $\dim W = m$.

$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ordenada de V y

$\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$ " " " W.

Entonces para cada $v \in V$.

$$[T]_\alpha^\beta [v]_\alpha = [T(v)]_\beta$$

Veamos esta igualdad en un diagrama conmutativo.

Sean $\varphi_\alpha : V \longrightarrow F^n$ y $\varphi_\beta : W \longrightarrow F^m$ los isomorfismos dados por.

$$\varphi_\alpha(v) = [v]_\alpha. \qquad \varphi_\beta(w) = [w]_\beta.$$

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \arrow[d, "\varphi_\beta"] \\
F^n \arrow[r, "L_A"'] & F^m
\end{tikzcd}
$$

Sea $A = [T]_\alpha^\beta$ y sea L_A la multiplicación por A, esto es. $L_A : F^n \longrightarrow F^m$ es la t. lineal dada por $L_A(\bar{X}) = A\bar{X}$

Que este diagrama sea conmutativo significa lo siguiente. $\varphi_\beta \circ T = L_A \circ \varphi_\alpha$

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & W \arrow[d, "\varphi_\beta"] \\
F^n \arrow[r, "L_A"'] & F^m
\end{tikzcd}
$$

$v \in V.$

$$
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, mapsto, "T"] \arrow[d, mapsto, "\varphi_\alpha"'] & T(v) \arrow[d, mapsto, "\varphi_\beta"] \\
& {[T(v)]_\beta} \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
{[v]_\alpha} \arrow[r, mapsto, "L_A"'] & A[v]_\alpha = [T]_\alpha^\beta [v]_\alpha
\end{tikzcd}
$$

dem:

Probaremos primero que para $j=1,\dots,n$.

$$[T]_\alpha^\beta [v_j]_\alpha = [T(v_j)]_\beta .$$

Tenemos que $[v_j]_\alpha \in F^n$ y lo obtenemos expresando al vector v_j como combinación lineal de $v_1,\dots,v_n$. Es decir

$$v_j = 0v_1 + \dots + 0v_{j-1} + 1v_j + 0v_{j+1} + \dots + 0v_n .$$

$$\therefore [v_j]_\alpha = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{coordenada } j}}{1},0,\dots,0) = \bar{e}_j = \text{j-ésimo vector canónico de } F^n .$$

Por otro lado, si B es cualquier de $m \times n$ y $\bar{e}_j$ es el j-ésimo vector canónico de F^n.

$$B\bar{e}_j = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-renglón.}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = \text{la } j\text{-ésima columna de } B.$$

Usando lo anterior, como $[v_j]_\alpha = \bar{e}_j$. entonces.

$$[T]_\alpha^\beta [v_j]_\alpha = [T]_\alpha^\beta \bar{e}_j = \text{la } j\text{-ésima}$$

columna de $[T]_\alpha^\beta$. y por definición de $[T]_\alpha^\beta$, tenemos que.

$$[T]_\alpha^\beta [v_j]_\alpha = [T(v_j)]_\beta .$$

Sea $v \in V$, entonces v se expresa de manera única en la forma $v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$.

de aquí que $[v]_\alpha = (b_1, \ldots, b_n)$ y

$$[v]_\alpha = [b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n]_\alpha = [b_1 v_1]_\alpha + \cdots + [b_n v_n]_\alpha$$

$$= b_1 [v_1]_\alpha + \cdots + b_n [v_n]_\alpha .$$

Entonces.

$$
\begin{aligned}
[T]_\alpha^\beta [v]_\alpha &= [T]_\alpha^\beta \left(b_1 [v_1]_\alpha + \cdots + b_n [v_n]_\alpha \right). \\
&= b_1 [T]_\alpha^\beta [v_1]_\alpha + \cdots + b_n [T]_\alpha^\beta [v_n]_\alpha . \\
&= b_1 [T(v_1)]_\beta + \cdots + b_n [T(v_n)]_\beta . \\
&= [b_1 T(v_1)]_\beta + \cdots + [b_n T(v_n)]_\beta . \\
&= [T(b_1 v_1)]_\beta + \cdots + [T(b_n v_n)]_\beta . \\
&= [T(b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n)]_\beta = [T(v)]_\beta .
\end{aligned}
$$

$$\left.\begin{array}{l} G: V \longrightarrow W \\ T: V \longrightarrow W \end{array}\right\} \text{t. lineal} \quad \dim V = n, \quad \dim W = m.$$

2)

$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ordenada de V.

$\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$ " " de W.

Entonces.

$$[T+G]_\alpha^\beta = [T]_\alpha^\beta + [G]_\alpha^\beta.$$

dem: P.D. que para cada $j = 1, \ldots, n$.
la j-ésima columna de $[T+G]_\alpha^\beta$ es igual a la
j-ésima columna de $[T]_\alpha^\beta + [G]_\alpha^\beta$.

Tenemos que:

la j-ésima columna de $[T+G]_\alpha^\beta$ es $[(T+G)(v_j)]_\beta$.
la " " de $[T]_\alpha^\beta$ es $[T(v_j)]_\beta$.
la " " " $[G]_\alpha^\beta$ es $[G(v_j)]_\beta$.

$$(A+B)^j = A^j + B^j$$

$\boxed{\text{la } j\text{-ésima columna de } [T]_\alpha^\beta + [G]_\alpha^\beta}$.

es la suma de la j-esima columna de $[T]_\alpha^\beta$ y la j-esima columna de $[G]_\alpha^\beta$, esto es. es igual a. $\boxed{[T(v_j)]_\beta + [G(v_j)]_\beta}$.

Por otro lado, la j-ésima columna de $[T+G]_{\alpha}^{\beta}$.

$$[(T+G)(v_j)]_{\beta} = [T(v_j)+G(v_j)]_{\beta}$$

$$= [T(v_j)]_{\beta} + [G(v_j)]_{\beta}$$

//

3) Con las hipótesis del teorema 2.

Para cada $\lambda \in F$.

$$[\lambda T]_\alpha^\beta = \lambda [T]_\alpha^\beta .$$

dem:

la j-esima columna de $[\lambda T]_\alpha^\beta$ es $[(\lambda T)(v_j)]_\beta$.

Como $[(\lambda T)(v_j)]_\beta = [\lambda T(v_j)]_\beta = \lambda [T(v_j)]_\beta$.

$\forall j = 1, \ldots, n$.

//.

4) Lema:

Sea $A \in M_{m \times n}(F)$ y $B \in M_{q \times m}(F)$.

Sean $L_A : F^n \longrightarrow F^m$. $\quad L_B : F^m \longrightarrow F^q$.

$L_A(\bar{X}) = A\bar{X}$. $\quad L_B(\bar{Y}) = B\bar{Y}$.

$BA \in M_{q \times n}(F)$ y sea

$L_{BA} : F^n \longrightarrow F^q$. $\quad L_{BA}(\bar{X}) = (BA)\bar{X}$.

Entonces.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathbb{F}^n \arrow[r, "L_A"] \arrow[rr, bend right=30, "L_B \circ L_A"'] \arrow[rr, bend right=70, "L_{BA}"'] & \mathbb{F}^m \arrow[r, "L_B"] & \mathbb{F}^q \end{tikzcd}$$

$$L_B \circ L_A = L_{BA}.$$

Sea $\overline{X} \in \mathbb{F}^n$, $\quad (L_B \circ L_A)(\overline{X}) = L_B(L_A(\overline{X})) = L_B(A\overline{X}) = B(A\overline{X}).$

$$L_{BA}(\overline{X}) = (BA)\overline{X} = B(A\overline{X}). \quad //$$

$$V \xrightarrow{T} W \qquad \dim V = \dim W = n.$$

$$\alpha \qquad\qquad \beta$$

T es un isomorfismo $\iff$ $[T]_{\alpha}^{\beta}$ es invertible.

Vamos a encontrar a T^{-1} a través de $\left([T]_{\alpha}^{\beta}\right)^{-1}$.