

22 de noviembre.

$$T : V \rightarrow W \quad \dim V = n \quad \dim W = m.$$

α y β bases ordenadas de V y W respectivamente.

$$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}.$$

$$[T]_{\alpha}^{\beta} = \left(\begin{array}{ccc} [T(v_1)]_{\beta} & [T(v_2)]_{\beta} & \dots & [T(v_n)]_{\beta} \end{array} \right).$$

$m \times n$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
columna 1 columna 2 ... columna n .

1) Sea $T: V \rightarrow W$ t. lineal, $\dim V = n$, $\dim W = m$.

$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ordenada de V y

$\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$ " " " W .

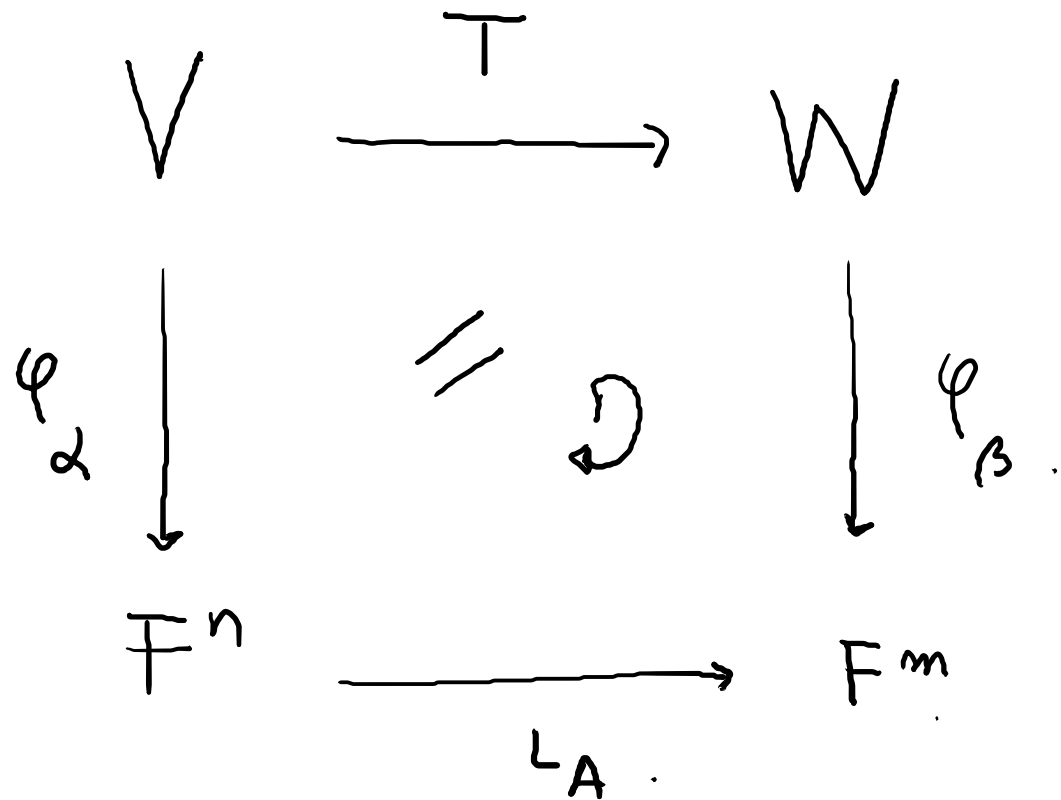
Entonces para cada $v \in V$

$$[T]_{\alpha}^{\beta} [v]_{\alpha} = [T(v)]_{\beta}$$

Veamos esta igualdad en un diagrama conmutativo.

Sean $\varphi_\alpha: V \rightarrow F^n$ y $\varphi_\beta: W \rightarrow F^m$ los isomorfismos dados por.

$$\varphi_\alpha(v) = [v]_\alpha \quad \varphi_\beta(w) = [w]_\beta.$$



Sea $A = [T]_{\alpha}^{\beta}$ y sea

L_A la multiplicación por A , esto es.

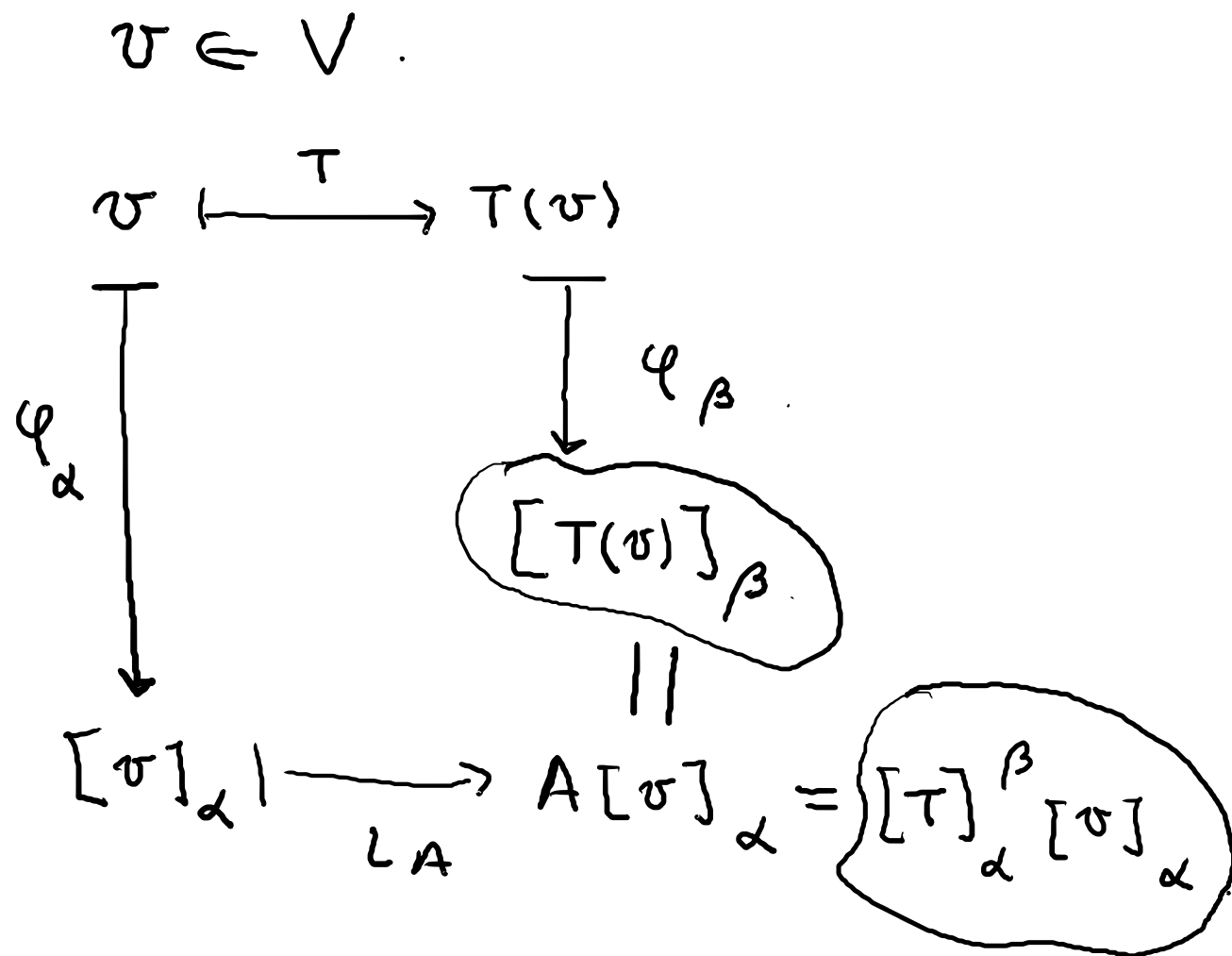
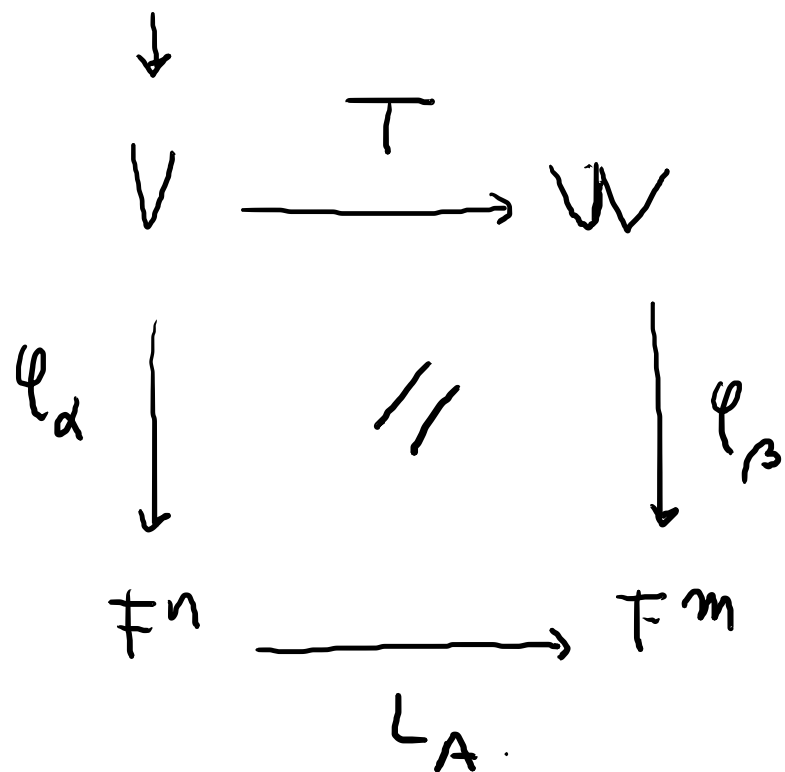
$L_A : F^n \longrightarrow F^m$ es

la t. lineal dada

$$\text{por } L_A(\bar{x}) = A\bar{x}$$

Que este diagrama sea conmutativo significa.

lo siguiente. $\varphi_{\beta} \circ T = L_A \circ \varphi_{\alpha}$



dem:.

Probaremos. primero que para $j = 1, \dots, n$.

$$[T]_{\alpha}^{\beta} [v_j]_{\alpha} = [T(v_j)]_{\beta}.$$

Tenemos que $[v_j]_{\alpha} \in \mathbb{F}^n$. y lo obtenemos expresando al vector v_j como combinación lineal de $v_1, \dots, v_n$. Es decir

$$v_j = 0v_1 + \dots + 0v_{j-1} + 1v_j + 0v_{j+1} + \dots + 0v_n.$$

$$\therefore [v_j]_{\alpha} = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coordenada } j}}{1}, 0, \dots, 0) = \bar{e}_j = j\text{-ésimo vector canónico de } \mathbb{F}^n.$$

Por otro lado, si B es cualquier de $m \times n$ y $\bar{e}_j$ es el j -ésimo vector canónico de F^n .

$$B \bar{e}_j = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-renglón}.$$

$$= \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = \text{la } j\text{-ésima columna de } B.$$

Usando lo anterior, como $[v_j]_\alpha = \bar{e}_j$,
entonces,

$[T]_\alpha^\beta [v_j]_\alpha = [T]_\alpha^\beta \bar{e}_j =$ la j -ésima
columna de $[T]_\alpha^\beta$. y por definición de
 $[T]_\alpha^\beta$, tenemos que.

$$[T]_\alpha^\beta [v_j]_\alpha = [T(v_j)]_\beta.$$

Sea $v \in V$, entonces v se expresa de manera única en la forma $v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$.

de aquí que $[v]_\alpha = (b_1, \dots, b_n)$ y

$$\begin{aligned} [v]_\alpha &= [b_1 v_1 + \dots + b_n v_n]_\alpha = [b_1 v_1]_\alpha + \dots + [b_n v_n]_\alpha \\ &= b_1 [v_1]_\alpha + \dots + b_n [v_n]_\alpha. \end{aligned}$$

Entonces.

$$\underline{[T]_{\alpha}^{\beta} [v]_{\alpha}} = [T]_{\alpha}^{\beta} (b_1 [v_1]_{\alpha} + \dots + b_n [v_n]_{\alpha}).$$

$$= b_1 \underline{[T]_{\alpha}^{\beta} [v_1]_{\alpha}} + \dots + b_n \underline{[T]_{\alpha}^{\beta} [v_n]_{\alpha}}.$$

$$= b_1 [T(v_1)]_{\beta} + \dots + b_n [T(v_n)]_{\beta}.$$

$$= [b_1 T(v_1)]_{\beta} + \dots + [b_n T(v_n)]_{\beta}.$$

$$= [T(b_1 v_1)]_{\beta} + \dots + [T(b_n v_n)]_{\beta}.$$

$$= [T(b_1 v_1 + \dots + b_n v_n)]_{\beta} = [T(v)]_{\beta}.$$

$G: V \rightarrow W$
 2) $T: V \rightarrow W$ } t. linear $\dim V = n$, $\dim W = m$.

$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ordenada de V .

$\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$ " " de W .

Entonces.

$$[T + G]_{\alpha}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\beta} + [G]_{\alpha}^{\beta}.$$

dem: P.D. que para cada $j = 1, \dots, n$.

la j -ésima columna de $[T+G]_{\alpha}^{\beta}$ es igual a la.
 j -ésima columna de $[T]_{\alpha}^{\beta} + [G]_{\alpha}^{\beta}$.

Tenemos que:

la j -ésima columna de $[T+G]_{\alpha}^{\beta}$ es $[(T+G)(v_j)]_{\beta}$.
la " " " de $[T]_{\alpha}^{\beta}$ es $[T(v_j)]_{\beta}$.
la " " " " $[G]_{\alpha}^{\beta}$ es $[G(v_j)]_{\beta}$.

$$(A+B)^j = A^j + B^j$$

la j -ésima columna de $[T]_d^\beta + [G]_d^\beta$.

es la suma de la j -ésima columna de $[T]_d^\beta$ y

la j -ésima columna de $[G]_d^\beta$, esto es.

es igual a.

$$[T(v_j)]_\beta + [G(v_j)]_\beta$$

Por otro lado, la j -ésima columna de $[T+G]_{\alpha}^{\beta}$.

$$\begin{aligned} [(T+G)(v_j)]_{\beta} &= [T(v_j) + G(v_j)]_{\beta} \\ &= [T(v_j)]_{\beta} + [G(v_j)]_{\beta} \quad // \end{aligned}$$

3) Con las hipótesis del teorema 2.

Para cada $\lambda \in F$.

$$[\lambda T]_{\alpha}^{\beta} = \lambda [T]_{\alpha}^{\beta}.$$

dem:

la j -ésima columna de $[\lambda T]_{\alpha}^{\beta}$ es $[(\lambda T)(v_j)]_{\beta}$.

$$\text{Como } [(\lambda T)(v_j)]_{\beta} = [\lambda T(v_j)]_{\beta} = \lambda [T(v_j)]_{\beta}.$$

$$\forall j = 1, \dots, n.$$

//

4) Lemma:

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. y $B \in M_{q \times m}(\mathbb{F})$.

Seja $L_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$.

$L_B: \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^q$.

$$L_A(\bar{X}) = A\bar{X}.$$

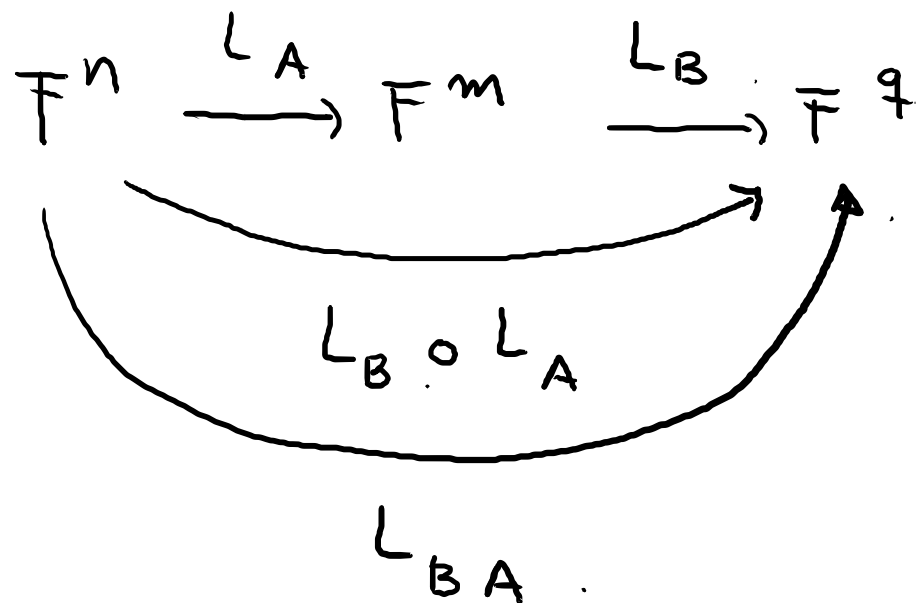
$$L_B(\bar{Y}) = B\bar{Y}.$$

$BA \in M_{q \times n}(\mathbb{F})$. y seja.

$L_{BA}: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^q$.

$$L_{BA}(\bar{X}) = (BA)\bar{X}.$$

Entrances.



$$L_B \circ L_A = L_{BA}.$$

Sea $\bar{X} \in F^n$, $(L_B \circ L_A)(\bar{X}) = L_B(L_A(\bar{X})) = L_B(A\bar{X}) = B(A\bar{X})$.

$$L_{BA}(\bar{X}) = (BA)\bar{X} = B(A\bar{X}). \quad //$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \alpha & & \beta \end{array}$$

$$\dim V = \dim W = n.$$

T es un isomorfismo $\Leftrightarrow [T]_{\alpha}^{\beta}$ es invertible.

Vamos a encontrar a T^{-1} a través de $([T]_{\alpha}^{\beta})^{-1}$.