21 de noviembre.

1) Sea $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(a,b) = (2a-3b,\ 5a+b)$$

- Encuentra bases para el $Ker(T)$ y $Im(T)$.
- Es T inyectiva? Es T suprayectiva.

- Para calcular el núcleo de T.

$T(a,b) = (2a-3b, 5a+b)$.

Un vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pertenece al núcleo de T.

$\iff T(a,b) = (0,0) \iff T(a,b) = (2a-3b, 5a+b) = (0,0)$

$\iff$ $2a-3b = 0$ y $5a+b = 0$ $\iff$ (a,b) es solución del.

sistema $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 5x+y=0 \end{cases}$ $\therefore$ $Ker(T)$ = espacio solución del sistema $\begin{matrix} 2x-3y=0 \\ 5x+y=0. \end{matrix}$

Para encontrar una base del núcleo hay que encontrar una base del espacio solución del sistema y para ello, resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 5x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2} y.$$

$$5x + y = \frac{15}{2} y + y = \frac{17}{2} y = 0.$$

$\Rightarrow y = 0 \quad \therefore \quad x = 0.$

$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible. $\therefore$ $\boxed{Ker(T) = \{(0,0)\}}$.

$\therefore$ T es inyectiva y una base de Ker(T) es el conjunto $\emptyset$.

- Para encontrar una base de $Im(T)$.

Usamos el siguiente teorema.

$*$ Si $T: V \longrightarrow W$ y V es de dimensión finita y $\{v_1, \ldots, v_k\}$ genera a V, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_k)\}$ genera a $Im(T)$.

Tomamos cualquier base de $\mathbb{R}^2$, por ejemplo.

$\{(1,0),(0,1)\}$., por el Teo $(*)$, $\{T(1,0), T(0,1)\}$ genera a $Im(T)$.

$T(a,b) = (2a-3b,\ 5a+b)$.

$T(1,0) = (2,5)$, $T(0,1) = (-3,1)$.

$\therefore \{(2,5), (-3,1)\}$ genera a $Im(T)$.

El siguiente paso es ver si este donjunto de generadores es l.i o' no.

$\det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$. $\therefore \{(2,5), (-3,1)\}$ es l.i.

$\Rightarrow \{(2,5), (-3,1)\}$ es base de $Im(T)$.

Como $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(T)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ $\therefore$ T es supravectiva.

$\therefore$ T es un isomorfismo //

2) Sea $\mathbb{R}_2[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$.

Sea $T: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transf. lineal.

dada por $T(a + bx + cx^2) = (a, b)$

- Calcular $\ker(T)$ y una base.

Un polinomio $a + bx + cx^2$ pertenece al núcleo de T.

$\iff T(a + bx + cx^2) = (a, b) = (0, 0)$.

$\iff a = 0$ y $b = 0 \iff a + bx + cx^2 = cx^2$.

$\therefore \operatorname{Ker}(T) = \{ c x^2 \mid c \in \mathbb{R} \}$.

Por tanto $\{x^2\}$ genera al núcleo de T.

y como $x^2 \neq 0$, entonces $\{x^2\}$ es l.i.

$\therefore \{x^2\}$ es base de $\operatorname{Ker}(T)$.

En particular $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}(T) = 1$.

$\operatorname{Ker}(T) \neq \{0\}$. entonces T no es inyectiva.

- Calcular la $Im(T)$ y una base.

Usamos el Teorema $(*)$. $T(a+bx+c)=(a,b)$

$T: \underbrace{\mathbb{R}_2[x]} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Tomamos cualquier base de $\mathbb{R}_2[x]$, por ejemplo.

$\{1, x, x^2\}$. Por el Teorema $(*)$, el conjunto

$\{T(1), T(x), T(x^2)\}$ genera a $Im(T)$.

$T(1)=T(1+0x+0x^2)=(1,0)$ $T(x)=T(0+1x+0x^2)=(0,1)$.

$T(x^2)=(0+0x+1x^2)=(0,0)$.

$\therefore \{(1,0),(0,1),\underbrace{(0,0)}\}$ genera a la $Im(T)$.

$\therefore \{(1,0),(0,1)\}$ genera a $Im(T)$.

y además es l.i.

$\{(1,0),(0,1)\}$ es base $Im(T)$.

$\therefore Im(T) = \mathbb{R}^2$.

$\therefore$ T es suprayectiva.

3) Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida

como $T_A(\bar{x}) = A\bar{x}$ donde $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

El $\ker(T)$ es el espacio solución del sistema.

$A\bar{x} = 0$. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+3y \\ 3x+2y \end{pmatrix}$.

Un vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es solución $\iff$ $-a+3b=0$

$3a+2b=0$.

$a=3b$, $3a+2b = 11b = 0$. $\Rightarrow b=0 \Rightarrow a=0$. $\ker(T) = (0,0)$.

Calculamos $Im(T)$.

Tomamos la base $\{(1,0),(0,1)\}$.

ent. $\left\{ T_A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, T_A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$ genera a $Im(T)$.

$T_A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, $T_A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

$\left\{ \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \right\}$ es l.i.

∴ es base de $Im(T) = \mathbb{R}^2$.