20 de noviembre.

1) Sea V un F-e.v., $\dim_F V = n$ y $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Diremos que β es una base ordenada si hay un orden en el conjunto de vectores de β.

Por ej. en $\mathbb{R}^2$. $\{\underset{\bar{e}_1}{\underset{\shortparallel}{(1,0)}}, \underset{\bar{e}_2}{\underset{\shortparallel}{(0,1)}}\}$. $\leftarrow$ orden usual.

$$\{\underset{v_1}{\underset{\shortparallel}{(0,1)}}, \underset{v_2}{\underset{\shortparallel}{(1,0)}}\}.$$

2) Sea V un F-e.v, $\dim_F V = n$

y $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ordenada de V.

Cada vector $v \in V$, se expresa de manera única

como $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, $a_1, \dots, a_n \in F$.

Definimos el vector de coordenadas de v respecto

de la base ordenada β como. $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$.

$$[v]_\beta = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in F^n.$$

3) Sea V un F-e.v, $\dim_F V = n$.

Entonces. $V \cong F^n$.

dem: Sea $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de V.

Definimos $\varphi_\beta : V \longrightarrow F^n$ como $\varphi_\beta(v) = [v]_\beta$.

P.D. φ_β es una t. lineal y que es biyectiva.

dem:

- φ_β es aditiva. Sean $v, v' \in V$.

Tenemos que $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, $v' = \sum_{i=1}^{n} a_i' v_i$.

$$\Rightarrow \quad v + v' = \sum_{i=1}^{n} (a_i + a_i') v_i$$

$$\varphi_\beta(v+v') = [v+v']_\beta = (a_1+a_1', a_2+a_2', \dots, a_n+a_n').$$

$$= (\underbrace{a_1, a_2 \dots, a_n}) + (a_1', a_2', \dots, a_n') = [v]_\beta + [v']_\beta.$$

$$= \varphi_\beta(v) + \varphi_\beta(v').$$

- φ_β es F-lineal. Sea $\lambda \in F$.

P.D. $\varphi_\beta(\lambda v) = \lambda \varphi_\beta(v)$.

Tenemos $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. $\Rightarrow$ $\lambda v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) v_i$

$$\Rightarrow [\lambda v]_\beta = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n) = \lambda \underbrace{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}.$$

$$= \lambda [v]_\beta = \lambda \varphi_\beta(v).$$

- φ_β es inyectiva. P.D. $\ker(\varphi_\beta) = \{0_V\}$.

Sea $v \in \ker(\varphi_\beta)$ P.D. $v = 0_V$.

Tenemos $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$,

$v \in \ker(\varphi_\beta) \Rightarrow \varphi_\beta(v) = [v]_\beta = (a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$

$\Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots n$.

$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0_V$

- φ_β es supra yectiva. $\varphi_\beta : V \longrightarrow F^n$.

Sea $(a_1, a_2, .., a_n) \in F^n$. Tenemos que encontrar un vector $v \in V$ tal que $\varphi_\beta(v) = [v]_\beta = (a_1, .., a_n)$.

Sea $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ ent. $[v]_\beta = (a_1, a_2, .., a_n)$.

4) La matriz asociada a una transf. lineal.

Sean V y W F-e.v, $\dim_F V = n$ y $\dim_F W = m$.

Sea $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ordenada de V y

$\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base ordenada de W.

Sea $T: V \to W$ una t. lineal.

Definimos la matriz asociada a T respecto de las bases ordenadas α y β como la matriz de $m \times n$ cuya j-ésima columna es $[T(v_j)]_\beta$ y la denotamos.

$$[T]_{\alpha}^{\beta} = \left([T(v_1)]_{\beta} \; [T(v_2)]_{\beta} \cdots [T(v_n)]_{\beta} \right).$$

1^a columna $\quad$ 2^a columna $\quad$ n-esima columna.

α' ota base ordenada de V.

β' ota base ordenada de W.

$$[T]_{\alpha'}^{\beta'} = \left([T(v_1)]_{\beta'} \; [T(v_2)]_{\beta'} \cdots [T(v_n)]_{\beta'} \right).$$

Notación:

Si $T : V \longrightarrow V$ $\dim_F V = n$.

y α es una base ordenada de V., escribimos.

$$[T]_\alpha^\alpha = [T]_\alpha$$

5) Sea $\mathbb{P}_3[x] = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(x) = 0$ ó grado $p(x) \leq 3 \}$.

Sea $T : \mathbb{P}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

$$T(p(x)) = (p(1), p(-1)).$$

Sea $\alpha = \{1, x, x^2, x^3\}$ base canónica ordenada de $\mathbb{P}_3[x]$.

$$\beta = \{(1,0), (0,1)\}.$$

Calcular. $[T]_\alpha^\beta$. $\quad 2 \times 4$.

Por definición: $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = x^2$, $v_4 = x^3$.

$$[T]_\alpha^\beta = \left([T(1)]_\beta \; [T(x)]_\beta \; [T(x^2)]_\beta \; [T(x^3)]_\beta \right).$$

$$T(1) = (1(1), 1(-1)) = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$$

$$[T(1)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(x) = (1, -1) = 1(1,0) + (-1)(0,1).$$

$$[T(x)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T(x^2) = (1, 1) = 1\,(1,0) + 1\,(0,1).$$

$$[T(x^2)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$T(x^3) = (1, -1) = 1\,(1,0) + (-1)\,(0,1).$$

$$[T(x^3)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$