18 de noviembre.

1) Sea $T: V \to W$, V y W F-e.v de dimensión finita y $\{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto de generadores de V.

Entonces $\{T(v_1), T(v_2), \dots T(v_n)\}$ genera a $Im(T)$ y en caso de que T sea suprayectiva.

$\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ genera W.

dem:

Sea $T(v) \in Im(T)$, como $v \in V$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera a V, entonces v se expresa como combinación lineal de $v_1, \dots, v_n$, es decir, existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

Entonces
$$\begin{aligned} T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= T(\alpha_1 v_1) + \dots + T(\alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n). \end{aligned}$$

$\therefore$ $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ genera a $Im(T)$.

2) Sea $T: V \longrightarrow W$ una t. lineal, V y W F-e.v de dimensión finita. Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ un conjunto de vectores de V l.i.

Si T es inyectiva, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es l.i..

dem:

P.D. $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es l.i.

Supongamos que $0_W = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_r T(v_r)$.

P.D. $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$.

Tenemos,

$$\begin{aligned} 0_W &= \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_r T(v_r). \\ &= T(\alpha_1 v_1) + \cdots + T(\alpha_r v_r). \\ &= T(\underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r}). \end{aligned}$$

Esto implica que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r \in \operatorname{Ker}(T)$. y como T es inyectiva $\iff \operatorname{Ker}(T) = \{0_V\}$ concluimos que.

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = 0_V .$$

Por hipótesis, $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es l.i.

entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$ //

3) Sean V y W F-e.v de dimensión finita y $T : V \longrightarrow W$ una t. lineal. entonces.

$$\dim_F(V) = \dim_F(\operatorname{Im}(T)) + \dim_F(\operatorname{Ker}(T)) .$$

dem:

Sea $\{z_1, \dots, z_k\}$ una base de $Ker(T) \leq V$.

Como $\{z_1, \dots, z_k\}$ es un subconjunto de V l.i.

lo podemos extender hasta obtener una base.

$\{z_1, \dots, z_k, v_1, \dots, v_r\}$ de V.

aplicamos la transformación T a los vectores.

de esta base.

Como $\{z_1, \dots, z_k, v_1, \dots, v_r\}$ genera a V entonces por

el Teorema (1), el conjunto $\{T(z_1), \dots, T(z_k), \boxed{T(v_1), \dots, T(v_r)}\}$

genera a $\operatorname{Im}(T)$.

Como $z_1, \ldots, z_k \in \ker(T)$ entonces.

$$T(z_1) = T(z_2) = \cdots = T(z_k) = 0_W.$$

Esto implica que $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ genera a $\operatorname{Im}(T)$

Probaremos que $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es l.i.

Supongamos que $0_W = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_r T(v_r)$.

$$= T(\underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r}_{}).$$

Esto implica que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r \in \mathrm{Ker}(T)$.

Como $\{z_1, \dots, z_k\}$ es base del núcleo, existen escalares $\beta_1, \dots, \beta_k$ tales que.

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \beta_1 z_1 + \cdots + \beta_n z_k.$$

$$\Rightarrow \quad \beta_1 z_1 + \cdots + \beta_k z_k - \alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_r v_r = 0_V.$$

Como $\{z_1, \dots, z_k, v_1, \dots, v_r\}$ es base de V, entonces.

$$\underbrace{\alpha_1 = \cdots = \alpha_r} = 0 = \beta_1 = \cdots = \beta_k.$$

$\therefore \quad \dim_F \operatorname{Im}(T) = r.$

$\dim \ker(T) = k.$ y $\dim V = k + r.$ //.

4) Sean

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "G \circ T"'] & W \arrow[r, "G"] & Z \end{tikzcd}$$

trans f. lineales.

Entonces $G \circ T$ es una transf. lineal.

- P.D. $G \circ T$ es aditiva. $\quad V \xrightarrow{G \circ T} Z$

Sean $v, v' \in V$. P.D. $G \circ T(v+v') = G \circ T(v) + G \circ T(v')$,

$$G \circ T(v+v') = G(T(v+v')) = G(T(v)+T(v')).$$

$$= G(T(v)) + G(T(v')).$$

$$= G \circ T(v) + G \circ T(v').$$

- P.D. $G \circ T$ es F-lineal.

Sea $v \in V$ y $\alpha \in F$. P.D. $G \circ T(\alpha v) = \alpha\, G \circ T(v)$.

$$G \circ T(\alpha v) = G(T(\alpha v)) = G(\alpha T(v)) = \alpha\, G(T(v)).$$

$$= \alpha\, G \circ T(v).$$

$\therefore$ $G \circ T$ es una transf. lineal.

5) Sea $T: V \longrightarrow W$ y $G: V \longrightarrow W$.

$$T+G\,(v) \underset{\text{def.}}{=} T(v) + G(v).$$

Entonces $T+G$ es una t. lineal.

dem:

- P.D. $T+G$ es aditiva.

Sean $v, v' \in V$, P.D. $T+G\,(v+v') = T+G\,(v) + T+G\,(v')$.

$$T+G\,(v+v') = T(v+v') + G(v+v') = T(v) + T(v') + G(v) + G(v').$$
$$= \underbrace{T(v) + G(v)} + \underbrace{T(v') + G(v')} = T+G\,(v) + T+G\,(v').$$

- P.D. $T+G$ es F-lineal.

Sea $v \in V$ y $\alpha \in F$. P.D. $T+G(\alpha v) = \alpha\, T+G(v)$.

$$T+G(\alpha v) = T(\alpha v) + G(\alpha v) = \alpha T(v) + \alpha G(v).$$

$$= \alpha\,(T(v) + G(v)) = \alpha\, T+G(v). \,//$$

$\therefore$ $T+G$ es una t. lineal.

6) El producto por escalares.

Sea $T : V \longrightarrow W$ y $\alpha \in F$.

definimos αT como la función.

$\alpha T : V \longrightarrow W$ dada por $(\alpha T)(v) = \alpha\, T(v)$

$\underline{\alpha T}$ es <u>una t. lineal</u>.

dem:

- αT es aditiva.

Sean $v, v' \in V$. P.D. $(\alpha T)(v+v') = (\alpha T)(v) + (\alpha T)(v')$.

$$(\alpha T)(v+v') = \alpha\, T(v+v') = \alpha\big(T(v)+T(v')\big)$$

$$= \alpha\, T(v) + \alpha\, T(v') = (\alpha T)(v) + (\alpha T)(v').$$

• αT es F-lineal.

Sea $v \in V$ y $\beta \in F$. P.D. $(\beta\alpha)T = \beta(\alpha T)$.

$$((\beta\alpha)T)(v) = (\beta\alpha)T(v) = \beta(\alpha T(v)).$$

$$= \beta(\alpha T)(v).$$

7). Sean V y W $\mathbb{F}$-e.v. y denotemos por

$$\mathcal{L}(V,W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) = \{T: V \to W \mid T \text{ es t. lineal}\}$$

entonces. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. con la suma de transformaciones y el producto. por escalares.

$\dim V = n \qquad\qquad \dim = m$

$$V \xrightarrow{\quad T \quad} W$$

$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$

$\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$

$$T(v_1) = \underline{a_{11}}\, w_1 + \underline{a_{21}}\, w_2 + \cdots + \underline{a_{m1}}\, w_m$$

$$T(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \cdots + a_{m2} w_m$$

$$\vdots$$

$$T(v_n) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \cdots + a_{mn} w_m$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} = [T]_\alpha^\beta$$

$$\mathrm{Hom}_F\big(\overset{\overset{\alpha}{n}}{V}, \overset{\overset{\beta}{m}}{W}\big) \overset{\downarrow}{\cong} M_{m\times n}(F).$$

$$\begin{aligned} T &\longmapsto [T]_\alpha^\beta . \\ &\longleftarrow\!\!| \; A . \end{aligned}$$