15 de noviembre.

$T: V \longrightarrow W$ una t. lineal.

$Im(T) = T(V) = \{T(v) / v \in V\}$ es subespacio de V.

además, T es supráyectiva $\Leftrightarrow Im(T) = W$.

1) Sea $A \in M_{m \times n}(F)$, y sea

$T_A : F^n \to F^m$ la transf. lineal dada por.

$T_A(x) = Ax$, donde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Ya sabemos que $Ker(T_A)$ = espacio solución del sistema $Ax = 0$.

Vamos a calcular la imagen de T_A.

Tenemos que:

Un vector $b \in F^m$ pertenece a $Im(T)$.

$\iff$ existe un vector $s \in F^n$ tal que $T(s) = b$.

$\iff$ $T(s) = As = b$.

$\iff$ s es solución del sistema $Ax = b$.

Escribimos la ec. $As=b$ como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{1n}s_n \\ \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \cdots + a_{mn}s_n \end{pmatrix} = s_1 \overset{A^1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} + s_2 \overset{A^2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} + \cdots + s_n \overset{A^n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}$$

$$s_1 A^1 + s_2 A^2 + \cdots + s_n A^n = b.$$

Por tanto un vector $b \in F^m$ pertenece a $\mathrm{Im}(T_A)$

$\Longleftrightarrow$ b es combinación lineal de las columnas de A.

$\Longleftrightarrow$ b pertenece al espacio columna de A.

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}(T_A) =$ el espacio columna de A.

Así que para encontrar una base de $\mathrm{Im}(T_A)$ hay que encontrar una base del espacio columna de A.

Por ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{\underset{m}{3} \times \underset{n}{3}}(\mathbb{R}). \qquad T_A : F^n \longrightarrow F^m.$$

$$T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T_A(X) = AX.$$

$$\underset{A^1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{A^2}{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{A^3}{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Paso 1.

Checar si $\{A^1, A^2, A^3\}$ es l.i.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + 3\beta + 5\gamma \\ 2\beta + 2\gamma \\ \alpha + \beta + \gamma \end{pmatrix}.$$

$$2\beta + 2\gamma = 0 \Rightarrow \beta = -\gamma.$$

$$\alpha - \gamma + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

$$3\beta + 5\gamma = -3\gamma + 5\gamma = 2\gamma = 0. \Rightarrow \gamma = 0$$

$\therefore$ $\{A^1, A^2, A^3\}$ l.i.

$\therefore$ es base del espacio columna.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$ ent. $\{A^1, A^2, A^3\}$ l.d.

Checar $\{A^2, A^3\}$ es l.i.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}.$$

$\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta.$

$2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow -2\beta + \beta = 0 \quad \alpha = 0 = \beta = 0.$

$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es l.i.

$\therefore$ es base.

2) Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V.

Si $t : \{v_1, \ldots, v_n\} \longrightarrow W$ es una función, entonces existe una única transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que $T(v_i) = t(v_i) \ \forall i = 1, \ldots, n$.

dem:

Sea $v \in V$, como $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V, v se expresa de manera única como.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad , \quad \alpha_i \in F .$$

Definimos $T : V \longrightarrow W$ como.

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t(v_i) = \alpha_1 t(v_1) + \dots + \alpha_n t(v_n) .$$

P.D. T es una t. lineal.

- T es aditiva.

Sea $v, v' \in V$, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $v' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' v_i$.

$$v + v' = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_i') v_i$$

$$\begin{aligned} T(v+v') &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_i') t(v_i). \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t(v_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' t(v_i). \\ &= T(v) + T(v'). \end{aligned}$$

- T es F- lineal.

$\alpha \in F$, $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

$$\alpha v = \sum_{i=1}^{n} \alpha \alpha_i v_i$$

$$T(\alpha v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha \alpha_i t(v_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t(v_i) = \alpha T(v).$$

$\therefore$ T es un t. lineal.

- Ahora probamos que $T: V \longrightarrow W$ es la única t. lineal tal que $T(v_i) = t(v_i)$ $\forall i = 1, \dots n$.

Supongamos que $T': V \longrightarrow W$ es una t. lineal tal que $T'(v_i) = t(v_i)$ $\forall i = 1, \dots n$.

P.D. $T = T'$.

Sea $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T'(v_i) = \sum_{i=1}^{n} T'(\alpha_i v_i)$$

$$= T'\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = T'(v).$$