11 de noviembre.

1) Transformaciones lineales.
2) Ejemplos.
3) Núcleo de una transformación lineal.
4) Ejemplos.

1) **Def:** Sean V y W espacios vectoriales sobre F. Una función $T: V \to W$ es una transformación lineal si satisface:

i) $T(v + v') = T(v) + T(v') \quad \forall\, v, v' \in V$

(T es aditiva).

ii) $T(\alpha v) = \alpha T(v)$

(T es F-lineal)

2) Teorema:

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal

entonces.

i) $T(0_V) = 0_W$

ii) $T(-v) = -T(v) \quad \forall v \in V$.

dem:.

i) $$0_W + \underbrace{\cancel{T(0_V)}}_{\in W} = T(0_V) = T(0_V + 0_V) \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ aditiva}}}{=} T(0_V) + \cancel{T(0_V)}$$

$\Rightarrow 0_W = T(0_V)$.

ii) Sea $v \in V$. P.D. $T(-v) = -T(v)$.

Tenemos. $-v = -1v$, entonces.

$$T(-v) = T(-1v) \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ es } F\text{-lineal}}}{=} -1T(v) = -T(v).$$

//.

3) Ejemplos.

a) Sea V un F-e.v y $I_V = id_V : V \to V$ la función identidad.

I_V es un transformación lineal.

b). Sean V y W F-e.v y $O : V \to W$ la función definida como $O(v) = 0_W \ \forall v \in V$.

es una transformación lineal, llamada la transf. cero.

- Sean $v, v' \in V$ P.D. $O(v+v') = O(v) + O(v')$.

$O(v+v') = 0_W$. $O(v) + O(v') = 0_W + 0_W = 0_W$.

$\therefore$ O es aditiva.

- Sea $v \in V$ y $\alpha \in F$. P.D. $O(\alpha v) = \alpha\, O(v)$.

$O(\alpha v) = 0_W$. $\alpha\, O(v) = \alpha\, 0_W = 0_W$.

c) Sean $\mathbb{R}_3[x] = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \,/\, f(x) = 0$ ó grado $f(x) \leq 3 \}$

$$= \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}.$$

$$\mathbb{R}_2[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Definimos. $D : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ como.

$$D(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = \underbrace{a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2}.$$

D es una transf. lineal. $m=2$ $n=4$

d) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 4} \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$

La matriz A induce una transformación lineal

$T_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como.

$$T_A(X) = AX = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Sean $x, x' \in \mathbb{R}^4$.

$$T_A(x + x') = A(x + x') = Ax + Ax'$$
$$= T_A(x) + T_A(x').$$

Sean $x \in \mathbb{R}^4$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$T_A(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha T_A(x).$$

e) Sea $A \in M_{m \times n}(F)$, A induce una transformación lineal $T_A : F^n \longrightarrow F^m$ dada por $T_A(X) = AX \quad \forall X \in F^n$

(visto como un vector de $n \times 1$).

La transformación lineal T_A se llama la multiplicación por A.

4) El núcleo de una transformación lineal

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal,

Definimos el núcleo ó Kernel de T, denotado

$Nuc(T) = Ker(T)$, como

$$Ker(T) = \{ v \in V \mid T(v) = 0_W \}.$$

Además, el Ker(T) es subespacio de V.

dem:

- $0_V \in \mathrm{Ker}(T)$ ya que $T(0_V) = 0_W$.

- Sean $v, v' \in \mathrm{Ker}(T)$ P.D. $v + v' \in \mathrm{Ker}(T)$.

P.D. $T(v+v') = 0_W$.

Tenemos que,

$$T(v+v') = T(v) + T(v') = 0_W + 0_W = 0_W.$$

- Sea $v \in \operatorname{Ker}(T)$ y $\alpha \in F$.

P.D. $\alpha v \in \operatorname{Ker}(T)$.

P.D. $T(\alpha v) = 0_W$.

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha 0_W = 0_W. \quad //.$$

5) Sea $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal.

Entonces T es inyectiva si y solo si $Ker(T) = \{0_V\}$.

dem:

$\Rightarrow$) Sup. que T es inyectiva.

Sea $v \in Ker(T)$. P.D. $v = 0_V$.

Como $v \in Ker(T)$, $T(v) = 0_W$ y por otro lado

sabemos $T(0_V) = 0_W$.

Por tanto. $T(v) = 0_W = T(0_V)$.

Como T es inyectiva, $v = 0_V$.

$\Leftarrow$) Sup. que $\ker(T) = \{0_V\}$.

P.D. T es inyectiva.

Sup. que $T(v) = T(v')$, donde $v, v' \in V$.

P.D. $v = v'$.

Como $T(v) = T(v')$, sumando el inverso de $T(v')$.

obtenemos que $T(v) - T(v') = 0_W$.

Como T es transformación lineal, $-T(v') = T(-v')$, así que.

$T(v) - T(v') = T(v) + T(-v') = T(\underbrace{v + (-v')}) = 0_W$.

esto implica que $v + (-v') = v - v' \in \operatorname{Ker}(T)$,

pero por hipótesis $\operatorname{Ker}(T) = \{0_V\}$.

de aquí que $v - v' = 0_V \implies v = v'$ //.

6) Ejemplos.

a) Calcular el núcleo de la transformación identidad.

$I_V : V \longrightarrow V$.

$$\operatorname{Ker}(I_V) = \{ v \in V \mid I_V(v) = 0_V \}$$

$$= \{ v \in V \mid v = 0_V \} = \{0_V\}.$$

$\therefore$ I_V es una transf. lineal inyectiva.

b) Sea $O : V \longrightarrow W$ la transformación cero.

$$O(v) = O_W. \quad \forall v \in V.$$

Calcular el nucleo de la transf. cero.

$$\ker(O) = \{ v \in V \mid O(v) = O_W \} = V$$

c) $D : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$. D es la transf. derivada

$$D(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2.$$

Calcular el nucleo de D.

$$\operatorname{Ker}(D) = \{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \;/\; D(p(x)) = 0 \}.$$

$$D(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = \underbrace{a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2} = 0$$

$\operatorname{Ker}(D) = \{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \;/\; p(x)$ es un polinomio cte $\}$.

d) Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(F)$. y

$T_A : \underbrace{F^n}_{} \longrightarrow F^m$ la multiplicación por A.

$T_A(X) = AX$. $\underbrace{\text{donde } X \text{ es un vector de } n \times 1}_{}$.

Calcular el núcleo de T_A.

$\operatorname{Ker}(T_A) = \{ S \in F^n \mid AS = 0 \}$.

$= \{ S \in F^n \mid S \text{ es solución del sistema } AX = 0 \}$

$=$ espacio solución del sistema $AX = 0$

Por tanto.

El sistema $AX=0$ tiene solo la solución trivial $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(T_A)=\{0_{F^n}\} \Longleftrightarrow T_A$ es inyectiva

El sistema $AX=0$ tiene soluciones no triviales $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(T_A)\neq\{0_{F^n}\} \Longleftrightarrow T_A$ no es inyectiva.

Si $f : A \longrightarrow B$ una función.

f es inyectiva si siempre $f(a) = f(a')$.

entonces $a = a'$.