6 de noviembre.

Recordar: Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(F)$

- espacio renglón o fila de A es el subespacio de F^n generado por renglones de A.

  $\langle A_1, \dots, A_m \rangle$

- espacio columna de A es el subespacio de F^m generado por las columnas de A.

  $\langle A^1, A^2, \dots, A^n \rangle$.

1) Def: Sea $A \in M_{m \times n}(F)$.

a) Definimos el rango por filas de A como $\text{rango}_f(A)$.
la dimensión del espacio fila de A,

b) Definimos el rango por columnas de A $\text{rango}_c(A)$
como la dimensión del espacio columna de A.

2) Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular el $\text{rango}_f(A)$.

El espacio renglón de A es.

$$\langle (2,0,0),(0,1,0),(6,2,0),(0,0,0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3.$$

$$\parallel$$

$$\langle (2,0,0),(0,1,0),(6,2,0) \rangle = \text{espacio renglón de } A.$$

Ahora veamos si los renglones $\{A_1, A_2, A_3\}$ es l.i.

sup. $(0,0,0) = \alpha(2,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(6,2,0)$.

$$= (2\alpha + 6\gamma, \beta + 2\gamma, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 6\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = -2\gamma, \quad \alpha = -3\gamma.$$

el sistema tiene solución no trivial, por ej

para $\gamma = 1$, $(0,0,0) = -3(2,0,0) - 2(0,1,0) + 1(6,2,0)$

$$\Rightarrow (6,2,0) = 3(2,0,0) + 2(0,1,0).$$

Ahora vemos si $\{A_1, A_2\}$ es l.i.

$$(0,0,0) = \alpha(2,0,0) + \beta(0,1,0)$$
$$= (2\alpha, \beta, 0).$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

$\therefore$ $\{A_1, A_2\}$ es l.i.

$\therefore$ $\{A_1, A_2\}$ es base del espacio renglón.

$\therefore$ $\text{rango}_f(A) = 2$.

Por otro lado, aplicamos op. elementales a la matriz hasta obtener su forma de Hermite.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cancel{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

$\text{rango}_f(R) = 2$.

$\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ es base del espacio renglón de R.

Teorema.

3) Sea $R = (c_{ij}) \in M_{m \times n}(F)$ que está en la forma escalonada reducida por filas.

Supongamos que R tiene r renglones no nulos.

Como R está FER, los renglones no nulos de R son $R_1, R_2, \dots, R_r$.

Entonces $\{R_1, R_2, \dots, R_r\}$ es base del espacio renglón de R y en consecuencia

$$r = \text{rango}_f(R) = \text{dimensión del espacio renglón de } R.$$

dem:

El espacio renglón de R es.

$$\langle R_1, \dots, R_r, R_{r+1}, \dots, R_m \rangle \leq F^n.$$

Como los renglones R_j con $j > r$ son nulos, entonces.

$$\langle R_1, \dots, R_r \rangle = \text{espacio renglón de } R.$$

Falta mostrar que $\{R_1, \dots, R_r\}$ es l.i.

Para cada $1 \leq i \leq r$, supongamos que la columna k_i es la columna pivote del renglón R_i.

Como R esta FER, tenemos que $k_1 < k_2 < \dots < k_r$.

y la entrada (i, k_i) de $R = (c_{ij})$ es la entrada pivote del renglon R_i, $c_{ik_i} = 1$.

$$R_i = (0 \dots\dots 0 \; c_{ik_i} = 1 \; c_{i\,k_i+1} \dots\dots c_{in})$$

Sup. que

$$(0) = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \cdots + \alpha_r R_r .$$

Sabemos que para cada $1 \leq i \leq r$ las entradas en la columna pivote k_i del renglo R_i son

$$C_{tk_i} = \begin{cases} 1 & t = i \\ 0 & t \neq i \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{renglón } i .$$

$$\alpha_i R_i = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_i 1 & \alpha_i c_{i k_{i+1}} & \cdots & \alpha_i c_{in} \end{pmatrix} \\ \ \uparrow_{k_i} \end{array}$$

Entonces la k_i-ésima entrada de la combinación lineal $(0) = \alpha_1 R_1 + \cdots + \alpha_r R_r$ es.

$$0 = \sum_{i=1}^{r} c_{tk_i} = \alpha_i .$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0 .$$

$\therefore$ $\{R_1, \ldots, R_r\}$ es base del espacio renglón de R.

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$.

$\text{rango}_{\mathbb{F}}(A) = n \iff A$ es invertible.