5 de noviembre.

1) Sea V un $\mathbb{F}$-e.v de dimensión finita n y S y T subespacios de V. Entonces

$$\dim_F(S+T) = \dim_F(S) + \dim_F(T) - \dim_F(S\cap T).$$

dem: Si $S\cap T = \{0_v\}$ ent. $\dim_F(S\cap T) = 0$.

en este caso la suma $S+T$ es directa

y por el anterior $\dim(S+T) = \dim(S) + \dim T$

Supongamos ahora que $S \cap T \neq \{0_V\}$.

y sea $\{v_1, \dots, v_k\}$ base de $S \cap T$, $\dim(S \cap T) = k$.

Tenemos que $S \cap T$ es subespacio de S y

también es subespacio de V.

$\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq S$ que es l. independiente

extendemos a $\{v_1, \dots, v_k\}$ a una base de S.

$\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_t\}$ ←

Hacemos lo mismo con T, es decir:

$\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq T$ y es l.i. la extendemos.

a una base de T, $\{v_1, \dots, v_k, z_1, \dots, z_r\}$.

$\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_t\}$ base de S. $\dim S = k + t$

$\{v_1, \dots, v_k, z_1, \dots, z_r\}$ base de T. $\dim T = k + r$.

$\{v_1, \dots, v_k\}$ es base de $S \cap T$, $\dim (S \cap T) = k$.

Vamos a probar que el conjunto

$$\{\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{\in S \cap T}, \underbrace{w_1, \dots, w_t}_{\in S}, \underbrace{z_1, \dots, z_r}_{\in T}\} \text{ es base de } S+T.$$

Tenemos que probar lo siguiente.

i) $v_1,\dots,v_k, w_1,\dots,w_t, z_1,\dots,z_r$ pertenecen a $S+T$.

ii) $\{v_1,\dots,v_k, w_1,\dots,w_t, z_1,\dots,z_r\}$ genera a $S+T$.

iii) $\{v_1,\dots,v_k, w_1,\dots,w_t, z_1,\dots,z_r\}$ es l.i.

---

i) Para cada $1\le i\le k$, $v_i \in S\cap T$. así que podemos escribir a v_i como $v_i = \underbrace{v_i}_{\in S} + \underbrace{0_V}_{\in T} = \underbrace{0_V}_{\in S} + \underbrace{v_i}_{\in T} \in S+T$

para cada $1 \leq j \leq t$. $w_j \in S+T$ ya que.

$w_j \in S$ y podemos escribir a w_j como.

$$w_j = w_j + 0_V \in S+T.$$

para cada $1 \leq \ell \leq r$, $z_\ell \in S+T$ ya que.

$z_\ell \in T$ y $z_\ell = 0_V + z_\ell \in S+T$.

ii) ahora probemos que $\underbrace{\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_t, z_1, \dots, z_l\}}$ genera a $S+T$.

Sea $x+y \in S+T$, tenemos $x \in S$, $y \in T$.

Como $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_t\}$ es base de S, entonces

x se expresa como $\boxed{x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_t w_t}$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_t \in F$.

Como $\{v_1, \dots, v_k, z_1, \dots, z_r\}$ es base de T y $y \in T$.

y se expresa como $y = \varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_k v_k + \delta_1 z_1 + \dots + \delta_r z_r$.

donde $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \delta_1, \dots, \delta_r \in F$.

Entonces.

$$x + y = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_t w_t + \varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_k v_k + \delta_1 z_1 + \dots + \delta_r z_r$$

$$= (\alpha_1 + \varepsilon_1) \underline{v_1} + \dots + (\alpha_k + \varepsilon_k) \underline{v_k} + \beta_1 \underline{w_1} + \dots + \beta_t \underline{w_t} + \delta_1 \underline{z_1} + \dots + \delta_r \underline{z_r}$$

iii) Ahora probamos que $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_t, z_1, \dots, z_r\}$ es l.i.

Sup. que $0_V = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_t w_t + (\gamma_1 z_1 + \dots + \gamma_r z_r)$

sumando inversos aditivos obtenemos que

$$\underbrace{\gamma_1 z_1 + \dots + \gamma_r z_r}_{\in T} = \underbrace{-\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_k v_k - \beta_1 w_1 - \dots - \beta_t w_t}_{\in S}.$$

pues $z_j \in T$.
$1 \leq j \leq r$.

$$\Rightarrow \gamma_1 z_1 + \dots + \gamma_r z_r \in S \cap T.$$

Como $\underline{\{v_1,\dots,v_k\}}$ es base de $S\cap T$, entonces

el vector $\underbrace{\gamma_1 z_1+\dots+\gamma_r z_r} = \delta_1 v_1+\dots+\delta_k v_k$.

$$\Rightarrow \quad 0_V = \delta_1 v_1+\dots+\delta_k v_k-\gamma_1 z_1-\dots-\gamma_r z_r .$$

Esto es una combinación lineal igual al vector cero de los vectores $v_1,\dots,v_k, z_1,\dots,z_r$.

Como $\underbrace{\{v_1,\dots,v_k, z_1,\dots,z_r\}}_{\text{es l.i}}$ es base de T.

por lo que $\delta_1=\dots=\delta_k=0=\gamma_1=\dots=\gamma_r$.

obtenemos que

$$0_V = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_t v_t + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_t w_t + \underbrace{\gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_r z_r}_{\substack{\| \\ 0_V}}.$$

pues $\gamma_i = 0$

$1 \leq i \leq r$.

$$0_V = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_t w_t. \quad (*)$$

Como $\{\underbrace{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_t}_{\text{l.i.}}\}$ es base de S.

esto implica que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0 = \beta_1 = \cdots = \beta_t$.

Por tanto $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_t, z_1, \dots, z_r\}$ es base de $S+T$. En particular

$$\dim_F(S+T) = \boxed{k+t+r}.$$

$$\dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T).$$

$$= (k+t) + (k+r) - k = \boxed{k+t+r}.$$

//

FECHA DE ENTREGA DE

LA TAREA 3 EL 18 DE NOVIEMBRE.

CUENTA COMO EXAMEN.