4 de noviembre.

1) Si V es un F-e.v y S, T son subespacios.

se define la suma de S y T como el conjunto.

$$S+T = \{ x+y \mid x \in S,\ y \in T \}.$$

- $S+T$ es subespacio de V.

- Sean $S_1, \dots, S_k$ subespacios de V entonces.

$S_1 + \dots + S_k = \{ \sum_{i=1}^{k} x_i \mid x_i \in S_i \}$ es un subespacio.

$$S_1 + \dots + S_k = \sum_{i=1}^{k} S_i \ . \qquad \sum_{i=1}^{k} x_i = \underset{\substack{\uparrow \\ S_1}}{x_1} + \underset{\substack{\uparrow \\ S_2}}{x_2} + \dots + \underset{\substack{\uparrow \\ S_k}}{x_k}.$$

Se prueba por inducción sobre $k \geq 2$.

que $S_1 + S_2 + \cdots + S_k = \sum_{i=1}^{k} S_i$ es subespacio de V.

2) Si V es un F-e.v y $S_1, \ldots, S_k$ son subespacios de V, entonces diremos que la suma $\sum_{i=1}^{k} S_i$ es directa si para cada $1 \leq j \leq k$.

$$S_j \cap \sum_{i \neq j} S_i = \{0_V\}.$$

Por ejemplo.

$k=2$, La suma S_1+S_2 es directa.

si $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$.

$k=3$ La suma $S_1+S_2+S_3$ es directa.

si para $j=1$, $S_1 \cap (S_2+S_3) = \{0_V\}$.

para $j=2$. $S_2 \cap (S_1+S_3) = \{0_V\}$.

para $j=3$. $S_3 \cap (S_1+S_2) = \{0_V\}$

los 3 se deben cumplir

4). Sea V un F-e.v. y S y T dos subespacios de V.

La suma $S+T$ es directa $\Leftrightarrow$ cada vector $v \in S+T$ se expresa de manera única como $v = x+y$ donde $x \in S$, $y \in T$.

dem:. Supongamos que la suma $S+T$ es directa, es decir, por definición $S \cap T = \{0_V\}$.

Sea $v \in S+T$, entonces por definición de $S+T$, v se expresa como $v = x+y$ donde $x \in S$ y $y \in T$.

Supongamos que $v = x+y = x'+y'$ donde $x, x' \in S$ y $y, y' \in T$.. P.D. $x = x'$ y $y = y'$.

Tenemos que $x+y = x'+y'$.

$$\Rightarrow \quad x - x' = y' - y.$$

$x, x' \in S$ y como S es subespacio $x - x' \in S$.

Como $y', y \in T$ y T es subespacio, $y' - y \in T$.

entonces $\underbrace{x - x'}_{\in S} = \underbrace{y' - y}_{\in T} \in S \cap T = \{0_V\}$.

$\Rightarrow \quad x - x' = y' - y = 0_V$.

$\Rightarrow \quad x = x'$ y $y' = y$. //

Ahora supongamos que cada vector $v \in S+T$.
se expresa de manera única como $v = x+y$.
donde $x \in S$ y $y \in T$.

P.D. que la suma $S+T$ es directa.

P.D. $S \cap T = \{0_V\}$.

Sea $v \in S \cap T$, P.D $v = 0_V$.

Como $v \in S$, podemos escribir a v como.

$$v = v + 0_V \in S+T$$

Como $v \in T$, podemos expresar a v como.

$$v = 0_V + v \in S + T.$$

$$\therefore \underset{\in S}{v} + \underset{\in T}{0_V} = v = \underset{\in S}{0_V} + \underset{\in T}{v}.$$

Como la expresión es única, por hipótesis.

entonces $v = 0_V$.

5). Sea V un $\mathbb{F}$-e.v de dimensión finita. y S y T subespacios de V.

Si la $S+T$ es directa, y B es una base de S y C es una base de T, entonces

$B \cup C$ es base de $S+T$.

dem: Como V es de dimensión finita.

S y T también son espacios de dimensión finita y además $\dim_F S \leq \dim_F V$ y $\dim_F T \leq \dim_F V$.

Sea $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ base de S y $C = \{w_1, \dots, w_k\}$ base de T.

Observemos que $B \cap C = \phi$

ya que si $v_i = w_j$ para algún $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq k$ entonces $v_i = w_j \in \underbrace{S \cap T} = \{0_V\}$

$\Rightarrow$ B y C tienen como elemento al vector cero, pero esto no es posible pues B y C son l.i.

P.D. $B \cup C = \{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_k\}$ es base de $S+T$.

Sea $z \in S+T$, entonces $z = x+y$ donde $x \in S$ y $y \in T$.

Como $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ es base S, x se expresa como

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m.$$

Como $C = \{w_1, \dots, w_k\}$ es base de T, y se expresa como

$$y = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_k w_k.$$

entonces.

$$z = x + y = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_k w_k .$$

$\therefore$ $\{v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_k\}$ genera a $S+T$.

P.D. $\{v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_k\}$ es l.i.

Sup. que $0_V = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_k w_k$.

entonces $$\underbrace{-\alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_m v_m}_{\in S} = \underbrace{\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_k w_k}_{\in T} .$$

pues $v_1, \ldots, v_m \in S$. pues $w_1, \ldots, w_k \in T$.

Esto implica que.

$$-\alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_m v_m = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_k w_k \in S \cap T = \{0_V\}.$$

$$\Rightarrow \quad -\alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_m v_m = 0_V \quad (1).$$

$$y \quad \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_k w_k = 0_V \quad (2).$$

Con $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es l.i, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$.

y $\{w_1, \ldots, w_k\}$ es l.i, $\beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$.

$\therefore$ $\{v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_k\}$ es l.i.

$\therefore \{v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_k\}$ es base de $S+T$.

Además, $\dim_F (S+T) = m+k$.

$$= \dim_F S + \dim_F T.$$

(bajo la hipótesis de que la suma $S+T$ es directa).

V un espacio de dimensión finita.

y S, T subespacios de V.

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

Notación: Si la suma de los subespacios $S+T$ es directa escribimos.

$$S+T = S \oplus T$$

2) Si V es un $\mathbb{F}$-e.v y $S_1, \dots, S_k$