25 de octubre parte 2.

1) Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$ con entradas en un campo F.
Si $n > m$, entonces el sistema $Ax = 0$ tiene solución no trivial.

dem: Sea R la forma de Hermite de A.
Sabemos que R es equivalente por filas a A.
por lo que los sistemas $Rx = 0$ y $Ax = 0$ tienen el mismo conjunto de soluciones.

Probaremos que $Rx=0$ tiene solución no trivial.

Por hipótesis $n > m$ ∴ Sea $r = \text{rango}_f(R)$

Tenemos que $r \leq m < n \Rightarrow r < n$.

∴ $n - r > 0 \Rightarrow$ el sistema $Rx=0$ tiene solución no trivial.

//

2) Sea V un F-e.v. finitamente generado y $\{v_1, \dots, v_m\}$ un conjunto de generadores de V. Entonces cualquier subconjunto de V linealmente independiente tiene a lo más m vectores.

dem: Sean $w_1, \dots, w_n \in V$ con $n > m$ y supongamos que este conjunto de vectores es l.i.

Como $\{v_1, \ldots, v_m\}$ genera a V, entonces para cada $1 \leq j \leq n$, el vector w_j se expresa como combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$. Esto es, existen escalares $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj} \in F$ tales que.

$$w_j = a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + \cdots + a_{mj} v_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_j .$$

Sea $A = (a_{ij}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ w_1 & w_2 & & w_m \end{array} \end{array}$.

Consideremos el sistema $Ax = 0$.

Tenemos que $n > m$, por Teorema (1).

el sistema tiene solución no trivial.

Sea $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in F^n$ una solución no trivial de $AX = 0$.

Probaremos que $s_1 w_1 + s_2 w_2 + \cdots + s_n w_n = 0_V$

y esto implicará que los vectores $w_1, \ldots, w_n$ son l.d.

lo cual contradice que $w_1, \ldots, w_n$ sea l.i.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot s_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \cdot s_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces.

$$s_1 w_1 + \cdots + s_n w_n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot s_j) v_i = 0_V . \quad //$$

3) Sea V un F-e.v. finitamente generado, entonces cualesquiera dos bases de V tienen el mismo número de elementos.

dem: Sean $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ y $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ bases de V. Tenemos que:

$\{v_1, \dots, v_m\}$ generan a V y $\{w_1, \dots, w_n\}$ es l.i.
por Lema (2), $n \leq m$.

$\{w_1, \dots, w_n\}$ genera a V y $\{v_1, \dots, v_m\}$ es l.i.

por el lema (2), $m \leq n$.

$\therefore$ $m = n$.

4) Sea V un F-e.v, diremos que V es de dimensión finita si tiene una base finita.

y definimos la dimensión de V sobre F como.

$$\dim_F V = \#\text{ elementos de cualquier base de } V.$$

5) Ejemplo:

El conjunto de vectores canónicos $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$.
es base de F^n.

$(a_1, \dots, a_n) \in F^n$,

$(a_1, \dots, a_n) = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + \dots + a_n \bar{e}_n$.

y $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ es l.i.

$$\dim_F F^n = n.$$

6) Ejemplo.

Sea $M_{m\times n}(F)$ el espacio de matrices de $m \times n$.

El conjunto de las matrices canónicas de $m \times n$.

$\{E^{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. es base de $M_{m\times n}(F)$.

$$\dim_F M_{m\times n}(F) = mn.$$

7) Sea $T^n(F)$ al subespacio de $M_{n\times n}(F)$ de las matrices triangulares superiores. Calcular $\dim_F T^n(F)$.

Hagámoslo para $n=3$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\underbrace{\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}}_{E^{11}} + a_{12}\underbrace{\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}}_{E^{12}} + a_{13}\underbrace{\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}}_{E^{13}}$$

$$+ a_{22}\underbrace{\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}}_{E^{22}} + a_{23}\underbrace{\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}}_{E^{23}} + a_{33}\underbrace{\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}}_{E^{33}}.$$

Las matices $B=\{E^{11}, E^{12}, E^{13}, E^{22}, E^{23}, E^{33}\}$ generan a $T^3(F)$.

Por otro lado el conjunto de todos las matices canónicos de 3×3 es l.i.

y B es un subconjunto de éste y por definición de l.i, B es l.i.

$\dim_F T^3(F) = 6$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots \; 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} n \\ + \\ n-1 \\ + \\ n-2 \\ \vdots \\ + \\ 1 \end{matrix}$$

Base de $T^n(F)$ es $\{ E^{ij} \mid i \leq j \}$.

$$\dim_F T^n(F) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$n = 3$.

//