Octubre 25.

Generalizamos el concepto de conjunto l.i.

1) Sea V un F-e.v y X un subconjunto de V. Diremos que X es linealmente independiente si cada subconjunto finito de X es linealmente independiente.

Obs: El conjunto vacío es l.i.

Sup. que $X = \emptyset$ no es l.i. entonces existe un subconjunto finito de X que es l.d. $\blacksquare$.

ya que $X = \phi$ no tiene elementos.

Recordemos que si V es un F-e.v y $v_1, \dots, v_n \in V$, el subespacio generado por $v_1, \dots, v_n$ se define como

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F \}.$$

2. Sea V un F-e.v y X cualquier subconjunto de V. Se define el subespacio generado por X como:

$$\langle X \rangle = \bigcap_{\substack{S \text{ subespacio de } V \\ X \subseteq S}} S$$

Obs: $\langle \phi \rangle = ?$

Por definición, $\langle \phi \rangle = \bigcap_{\substack{S \text{ subespacio de } V \\ \phi \subseteq V}} S$

Todo subespacio de V contiene al conjunto vacío, en particular el subespacio trivial $\{0_V\}$.

De aquí que $\langle \phi \rangle = \bigcap_{\substack{S \text{ subespacio de } V \\ \phi \subseteq S}} S = \{0_V\}$.

$\therefore$ el subespacio generado por el conjunto vacío es el subespacio trivial.

Ahora veamos como son los elementos de $\langle X \rangle$ si $X \neq \emptyset$.

4. Sea V un F-e.v y X un subconjunto no vacío de V. Entonces un vector $w \in V$ pertenece al subespacio $\langle X \rangle$ si y solo si existen vectores $v_1, \dots, v_r \in X$ y escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in F$ tales que $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r$.

Otra forma de decirlo:

$w \in \langle X \rangle \iff$ existe un subconjunto finito $X_w = \{v_1, \dots, v_r\}$ de X tal que $w \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$.

dem:

Supongamos que existen $v_1, \dots, v_r \in X$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in F$ tales que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = w$. P.D. $w \in \langle X \rangle$.

Por definición $\langle X \rangle = \bigcap\limits_{\substack{S \text{ subespacio de } V \\ X \subseteq S}} S$

Sea S subespacio de V tal que $X \subseteq S$.

P.D. $w \in S$.

Tenemos que $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$ y $v_1, \ldots, v_r \in X$.

como $X \subseteq S$ y S es subespacio de V entonces

$\alpha_i v_i \in S$ para $1 \leq i \leq r$. y como S es cerrado

bajo sumas. $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = w \in S$.

Ahora probamos el recíproco.

Sea $w \in \langle X \rangle$ queremos probar que existen $v_1, \dots, v_r \in X$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in F$ tales que

$$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r.$$

Consideremos el conjunto.

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \;\middle|\; \alpha_i \in F,\ v_i \in X,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

este conjunto es subespacio de V.

$0_V \in L$. ya que podemos tomar cualquier $v \in X$.

y entonces $0_V = 0v$.

Sea $\beta \in F$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in L$.

$$\beta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta(\alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} (\beta \alpha_i) v_i \in L.$$

Sean $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i' v_i' \in L$.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n .$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i' v_i' = \alpha_1' v_1' + \cdots + \alpha'_n v'_n .$$

Sea $z_1 = v_1 \;,\; z_2 = v_2 \;\cdots\; z_n = v_n .$

$z_{n+1} = v_1' \;, \cdots\; z_{n+m} = v'_m .$

$\beta_1 = \alpha_1 \quad \beta_2 = \alpha_2 \;\cdots\; \beta_n = \alpha_n .$

$\beta_{n+1} = \alpha_1' \;\cdots\; \beta_{n+m} = \alpha'_m .$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i' v_i' = \sum_{j=1}^{n+m} \beta_j z_j \in L .$$

Por otro lado, $\langle X \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a X.

Es decir si S es subespacio de V y $X \subseteq S$.

entonces $\langle X \rangle \subseteq S$.

y esto se cumple pues $\langle X \rangle = \bigcap\limits_{\substack{S \text{ subespacio de } V \\ X \subseteq S}} S$.

Por tanto, L es subespacio de V.

y $X \subseteq L$ y como $\langle X \rangle$ es el menor de los subespacios de V que contienen a X.

entonces $\langle X \rangle \subseteq L$.

$\therefore \; w \in \langle X \rangle \subseteq L$. //.

Obs: El conjunto vacío es base del subespacio trivial ya que el conjunto vacío es l.i y $\langle \phi \rangle = \{0_V\}$. //