23 y 25 de octubre.

Recordemos:

Sea V un $\mathbb{F}$-e.v. y $v_1, \ldots, v_n \in V$. Diremos que $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes ó bien que el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es l.i si

la única forma de expresar al vector cero como combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$ es.

$$0_V = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n.$$

y diremos que $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ no todos cero y tales que $0_V = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$.

1) Sea V un F-e.v y X un subconjunto de V. (X puede ser finito, vacío, infinito).

Diremos que X es linealmente independiente si cada subconjunto finito de X es linealmente independiente.

y diremos que X es linealmente dependiente si existe un subconjunto finito de X que es linealmente dependiente.

2) Ejemplo:

El conjunto vacío es l.i.

Si el conjunto ϕ fuera l.d. entonces existe un subconjunto finito de ϕ, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ l.d. $\boxtimes$. pues el conjunto vacío no tiene elementos.

3) Los vectores canónicos $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ en F^n, son l.i.

$$0_{F^n} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

4) Las matrices canónicas de $m \times n$ en el espacio de matrices $M_{m \times n}(F)$ son l.i.

4) Lema.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Sean $i, j \in I_n$, $i \neq j$ y σ una permutación de I_n.

i.e. $\sigma : I_n \longrightarrow I_n$ función biyectiva y que está definida como $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$, $\sigma(k) = k$ para $k \neq i$ y $k \neq j$.

Sea V un $\mathbb{F}$-e.v y $v_1, \ldots, v_n \in V$. Entonces.

a) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es l.i $\iff \{v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}\}$ es l.i.

b) Para cada $\alpha \in F$, $\alpha \neq 0$.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ es l.i $\iff \{v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ es l.i.

c) Para $i, j \in I_n$, $i \neq j$ y $\alpha \in F$.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ es l.i $\iff \{v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ es l.i dem.:

c) Sup. que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es l.i.

P.D. $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ es l.i.

Sup. que $0_V = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_i (v_i + \alpha v_j) + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n$.

$\Rightarrow$

$$0_V = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_i v_i + \beta_i \alpha v_j + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n.$$

$$= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_i v_i + \beta_j v_j + \beta_i \alpha v_j + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n.$$

$$= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_i v_i + (\beta_j + \beta_i \alpha) v_j + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n.$$

esta es una combinación lineal de los vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$.
y por hipótesis son l.i. y de aquí que.

$$\beta_1 = \dots = \beta_{i-1} = \beta_i = \underbrace{\beta_j + \beta_i \alpha} = \beta_{i+1} = \dots = \beta_n = 0.$$

$$\beta_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Recíprocamente, supongamos que.

$$\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \dots, v_n\} \text{ es l.i.}$$

Sup que:

$$0_V = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_j v_j + \cdots + \alpha_i v_i + \cdots + \alpha_n v_n \; .\text{—}$$

lo terminan. .

5) Def:

Sea V un $\mathbb{F}$-e.v. finitamente generado.

Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ conjunto de vectores de V.

a) Diremos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto mínimo de generadores si:

i) $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera a V.

ii) Para cada $1 \leq j \leq n$, $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_j\}$ ya no genera.

b) Diremos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es máximo l.i si:

i) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es l.i.

ii) Para cada $w \in V$, $w \neq v_i$, $1 \leq i \leq n$. el conjunto $\{v_1, \dots, v_n, w\}$ es l.d.

c) Diremos $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V si:

i) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es l.i.

ii) $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera a V.

6) Lema.

Sea V un F-e.v y supongamos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es l.i. Sea $w \in V$, entonces w no pertenece al subespacio generado por los vectores $v_1, \dots, v_n$ si y sólo $\{v_1, \dots, v_n, w\}$ es l.i.

De manera equivalente:

$$w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \iff \{v_1, \dots, v_n, w\} \text{ es l.d.}$$

dem:

$\Rightarrow$)

Sup. que $w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, entonces existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ tales que

$$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Esto implica que $0_V = \underbrace{(-1)}_{} w + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

y en consecuencia $\{v_1, \dots, v_n, w\}$ es l.d.

$\Leftarrow$) Sup. que $\{v_1, \dots, v_n, w\}$ es l.d.

P.D. $w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Como $\{v_1, \dots, v_n, w\}$ es l.d, existen escalares

$\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta}$ $\in F$ no todos cero y tales que

$$0_V = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta w.$$

Probaremos que $\beta \neq 0$.

Si $\beta = 0$, entonces al menos uno de los escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ es distinto de cero, y obtenemos.

$0_V = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. es una relación de dependencia, i.e. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es l.d. $\blacktriangledown$

$\therefore \beta \neq 0$.

Tenemos.

$$0_V = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta w.$$

$$\Rightarrow \beta w = -\alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_n v_n.$$

$$\Rightarrow w = -\beta^{-1}\alpha_1 v_1 - \cdots - \beta^{-1}\alpha_n v_n.$$

$$\Rightarrow w \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$$

//.

7) Teorema:

Sea V un F-e.v. finitamente generado y $\{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores en V. Son equivalentes

a) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V.

b) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto máximo l.i.

c) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto mínimo de generadores.

dem:

($a \Rightarrow b$) Por hipótesis $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base, en particular. $\{v_1, \dots, v_n\}$ es l.i.

Sea $w \in V$, $w \neq v_i$, $1 \leq i \leq n$.

P.D. $\{v_1, \dots, v_n, w\}$ es l.d. Por el lema (6), esto es equivalente a probar que $w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera V, entonces $w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ //

$(b \Rightarrow c)$ Hip: $\{v_1, \dots, v_n\}$ es máximo l.i.

P.D. i) $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera a V.

ii) para cada $1 \leq j \leq n$ el conjunto $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_j\}$ ya no genera a V.

Probamos primero (i)

Sea $w \in V$, si para alguna $1 \leq i \leq n$, $w = v_i$.

entonces. $w = v_i = 0v_1 + \dots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \dots + 0v_n$.

Supongamos que $w \neq v_i$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ es máximo l.i, entonces

el conjunto $\{v_1, \dots, v_n, w\}$ es l.d.

Por otro lado, $\{v_1, \dots, v_n\}$ es l.i., entonces por el lema (6).

$w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Por tanto $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera a V.

Ahora probemos (ii).

Sea $1 \leq j \leq n$. P.D. $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_j\}$ ya no genera.

Procedemos por contradicción.

Supongamos que $\underbrace{\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_j\}}$ genera V.

entonces v_j se expresa como.

$$v_j = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_j v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \dots + \alpha_n v_n.$$

$$\Rightarrow \quad 0_V = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_j v_{j-1} + (-1) v_j + \alpha_{j+1} v_{j+} + \dots + \alpha_n v_n.$$

$\Rightarrow$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ es l.d.

$(c \Rightarrow a)$. Hip. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto mínimo de generadores.

P.D. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V.

Por hipótesis, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera a V.

Solo hay que probar que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es l.i.

Procedemos por contradicción.

Supongamos que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es l.d.

entonces existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ no todos cero y tales que.

$$0_V = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n .$$

Renumerando a los escalares (si es necesario). podemos suponer sin pérdida de generalidad (SPG) que $\alpha_1 \neq 0$. Entonces.

$$0_V = \alpha^{-1} 0_V = \alpha_1^{-1} \alpha_1 v_1 + \alpha_1^{-1} \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_1^{-1} \alpha_n v_n .$$

$$\Rightarrow \quad 0_V = v_1 + \alpha_1^{-1} \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_1^{-1} \alpha_n v_n .$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = - \alpha_1^{-1} \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_1^{-1} \alpha_n v_n .$$

a partir de esto, concluimos que.

$\{v_2, \dots, v_n\} = \{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_1\}$ genera a V. ∇.

pues $\{v_1, \dots, v_n\}$ es mínimo de generadores. //.

Teorema

8) Existencia de bases en espacios vectoriales finitamente generados.

Sea V un F-e.v finitamente generado y X un conjunto finito de generadores de V. y Y un subconjunto X linealmente independiente. Entonces existe una base B de V tal que

$$Y \subseteq B \subseteq X.$$

dem:

Sea $\mathcal{J}$ la familia de todos los subconjuntos de X que contienen a Y que son l.i.

(Recordemos $Y \subseteq X$ y Y es l.i).

$\mathcal{J} \neq \emptyset$ pues $Y \in \mathcal{J}$

Observemos que cada elemento de $\mathcal{J}$ es finito. pues es subconjunto de X que es finito.

Sea $B \in J$ tal que $|B| \geq |C|$ para cada $C \in J$.

Como $B \in J$, tenemos que $Y \subseteq B$, y B es l.i.
Basta mostrar que B genera a V.

Sup. que $B = \{v, \ldots, v_n\}$. como $B \subseteq X$.
tenemos dos posibilidades. $B = X$ o $B \neq X$.

Si $B = X$ como X es conjunto de generadores entonces tenemos que B genera a V y B es l.i.

$\therefore$ B es base de V.

Si $B \neq X$, sea $w \in X$ tal que $w \notin B$.

entonces $B \cup \{w\} = \{v_1, \ldots, v_n\} \cup \{w\} = \{v_1, \ldots, v_n, w\}$.

es l.d. por el lema (6) tenemos que

$w \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, Esto implica que $X \subseteq \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

y en consecuencia $V = \langle X \rangle \subseteq \langle B \rangle \Rightarrow B = \langle V \rangle$ //