16 de octubre parte 2.

CONJUNTOS LINEALMENTE INDEPENDIENTES

CONJUNTOS LINEALMENTE DEPENDIENTES

1) Def: Sean V un F-ev. y $v_1, \ldots, v_n \in V$.

a) Diremos que el conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ó bien que los vectores $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes. si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no todos cero y tales que.

$$0_V = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n .$$

La igualdad anterior se llama una relación de dependencia.

b) Diremos que el conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si no es linealmente dependiente.

Esto es, la <u>única</u> forma en que el vector cero se expresa como combinación lineal de los vectores $v_1, \dots, v_n$ es

$$0_V = 0 v_1 + \cdots + 0 v_n .$$

Si queremos mostrar que un conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente. suponemos que

$$0_V = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n .$$

y hay que probar que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

2) Sea V un $\mathbb{F}$-e.v y X un subconjunto de V.

a) Diremos que X es linealmente independiente si cada subconjunto finito de X es linealmente independiente.

b) Diremos que X es linealmente dependiente si existe un subconjunto finito de X que es linealmente dependiente.

3. Sea V un F-e.v, entonces.

a) El conjunto vacío es linealmente independiente

b) Si X es un subconjunto de V y $0_V \in X$ entonces X es linealmente dependiente.

c) Si $v \in V$, $v \neq 0_V$ entonces $\{v\}$ es linealmente independiente.

d) Todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente

Notación:

linealmente independiente $:= l.i$

linealmente dependiente $:= l.d.$

dem:

a) Si el conjunto vacío no es l.i entonces es l.d.
por definición de conjunto l.d, existe un subconjunto finito $\{v_1, \dots, v_k\}$ del conjunto vacío que es l.d ∇

b) Sea $X \subseteq V$ tal que $0_V \in X$.
P.D. X es l.d. para ello basta mostrar que X contiene un subconjunto finito que es l.d.
Tomamos $\{0_V\} \subseteq X$ y $\{0_V\}$ es l.d pues $0_V = 1\, 0_V$

c) Sea $v \in V$, $v \neq 0_V$.

y supongamos $0_V = \alpha v$. P.D. $\alpha = 0$.

Como $0_V = \alpha v$ entonces $\alpha = 0$ ó $v = 0_V$.

por hipótesis, $v \neq 0_V$ por lo que $\alpha = 0$

d) Sea $X \subseteq V$ un conjunto l.i y sea $Y \subseteq X$.

P.D. Y es l.i., hay que probar que todo

subconjunto finito de Y es l.i.

Sea $Z \subseteq Y$, Z finito. , entonces.

Z es subconjunto finito de X y como X es l.i.

entonces por definición de l.i, todo subconjunto.
finito de X es l.i, en particular Z es l.i //

Lema.

4) Sea V un F-e.v y $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ que es l.i. Sea $w \in V$. Entonces.

$$w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \iff \{v_1, \dots, v_n, w\} \text{ es l.d.} \leftarrow$$

equivalentemente.

$$w \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle \iff \{v_1, \dots, v_n, w\} \text{ es l.i.}$$

$$(P \iff Q) \quad (\sim P \iff \sim Q)$$

dem:

$\Rightarrow$) Supongamos que $w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

P.D. $\{v_1, \dots, v_n, w\}$ es l.d.

Tenemos que.

Como $w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ entonces existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ tales que $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

esto implica que $0_V = 1 w - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_n v_n$.

y esto nos dice que $\{v_1, \dots, v_n, w\}$ es l.d.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\{v_1, \dots, v_n, w\}$ es l.d.

P.D. $w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, i.e. que w se expresa como combinación lineal de $v_1, \dots, v_n$.

Como $\{v_1, \dots, v_n, w\}$ es l.d existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in F$ no todos cero y tales que

$$0_V = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta w$$

Probaremos que forzozamente $\beta \neq 0$.

Supongamos que $\beta = 0$. Entonces.

$$0_V = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Como al menos uno de los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ es distinto de cero y estamos suponiendo que $\beta = 0$. entonces al menos uno de los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ es distinto de cero. SPG podemos suponer que $\alpha_1 \neq 0$.

entonces la igualdad $0_V = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ es

una relación de dependencia pues $\alpha_1 \neq 0$. ∇

pues por hipótesis el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es l.i.

Por tanto $\beta \neq 0$.

Tenemos. $0_V = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta w$, $\beta \neq 0$.

multiplicamos por β^{-1} y obtenemos

$$0_V = \beta^{-1} 0_V = \beta^{-1}\alpha_1 v_1 + \cdots + \beta^{-1}\alpha_n v_n + \beta^{-1}\beta w.$$

sumando inversos aditivos obtenemos que.

$$w = -\beta^{-1}\alpha_1 v_1 - \cdots - \beta^{-1}\alpha_n v_n.$$

i.e. w es combinación lineal de $v_1, \dots, v_n$. //.

6) Ejemplos.

a) Los vectores canónicos $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ de F^n.

es un conjunto l.i.

$$\bar{e}_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-esima} \\ \text{coord.}}}{1}, 0, \dots) = (\delta_{ij})_{j=1}^{n} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Sup. que

$$0_{F^n} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n .$$

la i-ésima coordenada de la suma $\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$. y por definición de suma en F^n, es igual a la de las i-ésimas coordenadas de $\alpha_1 \bar{e}_1, \dots, \alpha_n \bar{e}_n$.

Si $v \in F^n$, denotemos por $v(i)$ a la i-ésima coordenada de v. $v = (v_1, \dots v_n)$, $v(i) = v_i$.

Así la i-ésima coordenada de $0_{F^n} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{e}_n$.

$$0 = 0_{F^n}(i) = (\alpha_1 \bar{e}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{e}_n)(i)$$

$$= \alpha_1 \bar{e}_1(i) + \cdots + \alpha_n \bar{e}_n(i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \bar{e}_k(i) = \alpha_i$$ ya que

si $k \neq i$, $\bar{e}_k(i) = 0$
$k = i$, $\bar{e}_i(i) = 1$.

$$\Rightarrow \alpha_k \bar{e}_k(i) = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ \alpha_i & k = i. \end{cases}$$

b) El conjunto de matrices canónicas en $M_{m\times n}(F)$.

$\{E^{ij} \mid 1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n\}$ y donde

la entrada (k,l) de la matriz E^{ij} es

$$E^{ij}(k,l)=\begin{cases}1 & \text{si } (k,l)=(i,j)\\ 0 & \text{si } (k,l)\neq(i,j).\end{cases}$$

es l.i.

c) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ es función $\}$.

el conjunto $\{ f(t) = t,\ g(t) = t^2 \}$ es l.i.

Sup. que $\quad 0(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$.

$$= \alpha t + \beta t^2 .$$

para $t=1$. $\quad 0 = 0(1) = \alpha 1 + \beta (1)^2 = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = -\beta$.

$t = -1$. $\quad 0 = 0(-1) = \alpha(-1) + \beta(-1)^2 = -\alpha + \beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

$\Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0$.

d) Determina si el siguiente subconjunto del espacio de matrices $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ es l.i ó l.d.

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Planteamos la ec. vectorial.

$\boxed{\text{es l.i}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3\alpha+\beta & 2\alpha+\beta & \alpha+\beta \\ \beta & 2\alpha+\beta+2\gamma & \alpha+\beta-\gamma \end{pmatrix}$$

$-3\alpha+\beta=0 \quad 2\alpha+\beta=0$

$\alpha+\beta=0 \quad \beta=0$

$2\alpha+\beta+2\gamma=0 \quad \alpha+\beta-\gamma=0$

7) Def: Sea V un F-e.v y
X un subconjunto de V.
Diremos que X es base de V si X es l.i
y genera a V.

8). El espacio trivial $\{0_v\}$ tiene como base
al conjunto vacío.
$X = \phi$ es l.i, $\langle \phi \rangle = \{0_v\}$.

V finitamente generado.

$\{v_1, \dots, v_m\}$ conj. de generadores de V.

$\{w_1, \dots, w_n\}$ conjunto l.i en V.

entonces $n \leq m$.