16 de octubre.

- COMBINACIONES LINEALES.
- CONJUNTO DE GENERADORES.
- EL SUBESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO.
- DEPENDENCIA LINEAL.
- INDEPENDENCIA LINEAL
- BASES.

DEF.

1) Sea V un F-e.v y $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Una combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$.
es una expresión de la forma.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i .$$

donde $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in F$.

2) DEF: Sea V un F-e.v, $v_1, \dots, v_n$ y $w \in V$.

Diremos que el vector w es combinación lineal de los vectores $v_1, \dots, v_n$ si existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ tales que

$$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i .$$

3) Ejemplos.

a) Cualquier vector $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$

b) El vector $(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ no es combinación lineal de los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$

Sup. que existen escalares α y $\beta \in F$ tales que $(0,0,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0)$

$\Rightarrow (0,0,1) = (\alpha, \beta, 0)$

$\Rightarrow 1 = 0$ ∇.

Ya sabemos que si V es F-e.v y $S_1, \dots, S_k$ son subespacios de V entonces.

$$S_1 \cap \dots \cap S_k = \bigcap_{i=1}^{k} S_i \text{ es un subespacio de } V.$$

4) Sea V un F-e.v. y $\{S_i\}_{i \in I}$ donde S_i es subespacio de V para cada $i \in I$.

entonces. $\displaystyle\bigcap_{i \in I} S_i$ es subespacio de V.

dem:

Por definición $\bigcap_{i\in I} S_i = \{ v \in V \,/\, v \in S_i \ \forall i \in I \}$.

- $0_V \in \bigcap_{i\in I} S_i$ ya que $0_V \in S_i \ \forall i \in I$.

- Sean $v, v' \in \bigcap_{i\in I} S_i$, entonces $v, v' \in S_i \ \forall i \in I$.

$\Rightarrow v + v' \in S_i, \ \forall i \in I \Rightarrow v + v' \in \bigcap_{i\in I} S_i$.

- Sea $v \in \bigcap_{i \in I} S_i$ y $\alpha \in F$.

$v \in S_i \ \forall i \in I$ como S_i es cerrado bajo producto por escalares $\forall i \in I$, entonces $\alpha v \in S_i$ $\forall i \in I$, por lo que $\alpha v \in \bigcap_{i \in I} S_i$. //

5) El subespacio generado por un conjunto.

Sea V un F-e.v. y X un subconjunto de V.
(X puede ser vacío).

Sea $\mathcal{L} = \{ S \mid S$ es subespacio de V y $X \subseteq S \}$.

Definimos el <u>subespacio generado por X</u> como

$$\langle X \rangle = \bigcap_{S \in \mathcal{L}} S.$$

El subespacio generado por X, $\langle X \rangle$
es el menor de los subespacios de V
que contienen a X. Es decir.

- $X \subseteq \langle X \rangle$
- Si T es un subespacio de V tal que
$X \subseteq T$ ent. $\langle X \rangle \subseteq T$.

dem:

- P.D. $X \subseteq \langle X \rangle = \bigcap_{S \in \mathcal{L}} S$.

Sea $S \in \mathcal{L}$ entonces $X \subseteq S$.

$$\Rightarrow X \subseteq \bigcap_{S \in \mathcal{L}} S.$$

- Sea T un subespacio de V tal que $X \subseteq T$. ($ie.$ $T \in \mathcal{L}$).

Entonces $\langle X \rangle = \bigcap_{S \in \mathcal{L}} S \subseteq T$ //.

6) Sea V un $\mathbb{F}$-e.v. entonces.

$$\langle \phi \rangle = \{0_V\}.$$

dem: Por definición de subespacio generado por un conjunto,

$$\langle \phi \rangle = \bigcap_{\substack{S \text{ es subespacio de } V. \\ \emptyset \subseteq S.}} S$$

Observemos que cada subespacio de V contiene al conjunto vacío.

En particular el subespacio trivial contiene al conjunto vacío.

Entonces $\langle \phi \rangle = \bigcap S \subseteq \{0_V\}$

S subespacio de V.

$\phi \subseteq S$.

$\Longrightarrow \langle \phi \rangle = \{0_V\}$. //

7). Sea V un F-e.v., X un subconjunto <u>no</u> <u>vacío</u> de V. Entonces, un vector $v \in V$ pertenece al subespacio generado por X $\Longleftrightarrow$ existe un subconjunto finito $X_v = \{v_1, \dots, v_r\}$ de X tal que v es combinación lineal de los vectores $v_1, \dots, v_r$.

Veamos un ejemplo:

Consideremos el F - e.v $F[x]$ de los polinomios en x con coeficientes en F.

Sea $X = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\} = \{x^i \mid i \geq 0\}$.

Sea $f(x) = x^7 - 8x^4 + x^2 - x + 1$.

$f(x)$ es combinación lineal de $x^7, x^4, x^2, x, 1$.

$f(x) \in \langle X \rangle$.

Ahora tomemos $X = \{ x^r \mid r \text{ es impar} \}$.

$= \{ x, x^3, \ldots, x^{2k+1}, \ldots \}$.

el polinomio. $f(x) = 2$ no pertenece a $\langle X \rangle$.

el grado $f(x) = 0$ y por otro lado.

cualquier combinación lineal de la forma.

$\alpha_1 x^{r_1} + \cdots + \alpha_s x^{r_s}$ donde $r_1, \ldots, r_s$ impares

es un polinomio de grado impar.

demostración de (7).

Sea $T = \{ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in F, v_i \in X, r \in \mathbb{N} \}$.

T contiene a X ya que para cada $v \in X$.

$v = 1 v$.

Además, T es un subespacio de V.

$0_V \in T$ pues si $v \in X$ entonces $0_V = 0 v$.

Sean $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$, $\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_s w_s = w$.

donde $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s \in X$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots \beta_s \in F$.

entonces.

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_s w_s.$$

es una combinación lineal de vectores de X.

por lo que $v + w \in T$.

Sea $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r \in T$ y $\beta \in F$.

entonces $\beta(\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_r v_r) = \beta\alpha_1 v_1 + \cdots + \beta\alpha_r v_r \in T$.

$\therefore$ T es subespacio de V y $X \subseteq T$.

Ya probamos que el subespacio generado por X, $\langle X \rangle$ es el menor de los subespacios de V que contienen a X, por lo que $\langle X \rangle \subseteq T$.

Probemos ahora que $T \subseteq \langle X \rangle$.

Sea $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \in T$. $(v_1, \dots, v_r \in X)$.

$$\langle X \rangle = \bigcap_{\substack{S \text{ subespacio de } V. \\ X \subseteq S}} S$$

Sea S un subespacio de V tal que $X \subseteq S$.

entonces $v_1, \dots, v_r \in S$. Como S es subespacio.

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \in S$. $\therefore$ $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \in \langle X \rangle$.

Observación:

Si X es finito, $X = \{v_1, \dots, v_n\}$.

$$\langle X \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in F \right\}.$$

8) Ejemplos.

a) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. $X = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$\langle X \rangle = ?$

$$\langle X \rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3\alpha & -\alpha+\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

$\langle X \rangle = ?$

$$\langle X \rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle/\, \begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{matrix} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} = M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

9) Def: Sea V un F-e.v, $V \neq \{0_V\}$.

y X un subconjunto no vacío de V.

Diremos que <u>X</u> genera <u>a</u> <u>V</u> ó que

<u>X es un conjunto de generadores de V</u>

si $\langle X \rangle = V$.

Por ejemplo en 8(b).
el conjunto de las matrices canónicas de 2×2 genera a $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

10. Sea V un $\mathbb{F}$-e.v, diremos que <u>V está finitamente generado</u> si existe un <u>subconjunto finito</u> X de V tal que.

$$\langle X \rangle = V.$$

dicho de otra manera, si V tiene un conjunto finito de generadores.

V está finitamente generado si existen vectores $v_1, \dots, v_k \in V$ tales que cada vector $w \in V$ se expresa como combinación lineal de los vectores $v_1, \dots, v_k$.

II) Ejemplos.

a) En F^n, el conjunto de vectores canónicos $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ genera a F^n. ya que si $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in F^n$,

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + \dots + a_n \bar{e}_n .$$

b) En el espacio $M_{m\times n}(F)$. el conjunto. de las matrices canónicos $\{E^{ij} \mid 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$. genera a $M_{m\times n}(F)$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \sum_{\substack{(i,j) \\ 1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} a_{ij}\cdot E^{ij}$$

c). Sea $n \in \mathbb{N}$, y sea.

$$F_n[x] = \{ f(x) \in F[x] \mid f(x) = 0 \text{ ó grado } f(x) \leq n \}.$$

$F_n[x]$ es un subespacio de $F[x]$.

Sea $X = \{1, x, \dots, x^n\}$. El conjunto X genera a $F_n[x]$.

d) El espacio $F[x]$ no está finitamente generado.

Supongamos $F[x]$ está finitamente generado. entonces existe un numero finito de polinomios. $P_1(x), \dots, P_k(x)$ tales que.

$$\langle P_1(x), \dots, P_k(x) \rangle = F[x].$$

SPG. podemos suponer que grado $P_k(x) \geq$ grado $P_i(x)$
$1 \leq i \leq k$.

Sup. que grado $p_k(x) = m$.

Entonces como estamos suponiendo que

$\langle p_1(x), \dots, p_k(x) \rangle = F[x]$ entonces

X^{m+1} es combinación lineal de $p_1(x), \dots, p_k(x)$.

esto es. existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in F$ tales que.

$$X^{m+1} = \alpha_1 p_1(x) + \dots + \alpha_k p_k(x).$$

Tenemos que.

$$\text{grado}(x^{m+1}) = m+1 \quad \text{y}$$

$$\text{grado}(\alpha_1 p_1(x) + \cdots + \alpha_k p_k(x)).$$

$$\leq \max\{\text{grado}(p_1(x)), \ldots, \text{grado}(p_k(x))\}$$

$$= \text{grado}\, p_k(x) = m.$$

si $f(x)$ y $g(x) \in F[x]$. y $f(x)+g(x) \neq 0$.

$\text{grado}(f(x)+g(x)) \leq \max\{\text{grado } f(x), \text{grado } g(x)\}$.

12) Ejemplo.

Sea $A \in M_{m \times n}(F)$ y consideremos el sistema

$AX = 0$.

Ya sabemos que el conjunto de soluciones W del sistema $AX=0$ es subespacio de F^n.

- Si el sistema tiene solución no trivial.

Por ejemplo.

$$x - 2y + 6z = 0.$$

$$\Rightarrow \quad x = 2y - 6z.$$

x es variable dependiente, y, z variables indep.

Cualquier solución del sistema es de la forma.

$$(2y - 6z, y, z)$$

y el espacio solución del sistema es.

$$W = \{ (2y - 6z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R} \}.$$

$$(2y - 6z, y, z) = y(\underbrace{2, 1, 0}) + z(\underbrace{-6, 0, 1}).$$

si $y = 1$ $z = 1$.

$$(-4, 1, 1) = 1(2, 1, 0) + 1(-6, 0, 1).$$

$\{ (2, 1, 0), (-6, 0, 1) \}$ genera a W.

W se llama el <u>espacio</u> <u>solución</u> del sistema.

Queremos encontrar un conjunto de generadores del espacio solución W.

- Si el sistema solo tiene la solución trivial, entonces $W = \{0\}$ y en este caso el vector cero de F^n genera a W.